Corrigé LHR - Sujet n°1

Exercice 1

Partie I :

1) (U_n) suite arithmétique telle que :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 19 \\ u_6 - u_4 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_0 + 3r = 19 \\ 2r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \text{et } \begin{matrix} r = 9 \\ u_0 = -4 \end{matrix}$$

D'où $U_n = -4 + 9n$.

2) $U_p > 221 \Rightarrow -4 + 9p > 221 \Leftrightarrow p > 25$

D'où le premier entier tel que $U_p > 221$ est $p = 26$.

3/ Soit $u_n = 896 \Leftrightarrow -4 + 9n = 896 \Leftrightarrow n = 100$.

Donc le terme égal à 896 est u_{100}.

Partie II

n étant le nombre de fruits cueillis.

- Au premier gardien, il offre $\frac{n}{2} + 2$ fruits

il lui reste $n - \left(\frac{n}{2} + 2\right) = \frac{n}{2} - 2 = \frac{n-4}{2}$

- Au 2ème gardien, il offre $\frac{1}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right) + 2 = \frac{n-4}{4} + \frac{8}{4} = \frac{n+4}{4}$

Après le deuxième gardien, il lui reste

$$\frac{n-4}{2} - \frac{n+4}{4} = \frac{2n-8-n-4}{4} = \frac{n-12}{4}$$

- Au 3ème gardien, il offre $\frac{1}{2}\left(\frac{n-12}{4}\right) + 2 = \frac{n-12}{8} + \frac{16}{8} = \frac{n+4}{8}$

Après le 3ème gardien, il lui reste

$$\frac{n-12}{4} - \frac{n+4}{8} = \frac{2n-24-n-4}{8} = \frac{n-28}{8}$$

Pour trouver n, le nombre de fruits cueillis, on pose

$$\frac{n-28}{8} = 1 \Rightarrow n = 36.$$

L'homme a cueilli en tout 36 fruits.

Exercice 2

Course de 6 chevaux A, B, C, D, E et F.

$$\text{Card}\,\Omega = 6! = 720$$

1/a) M : « Le cheval A occupe la $2^{ème}$ place ».

Card M : $5 \times 1 \times 4! = 120$

$$P(M) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}.$$

b/ N : « A occupe la première place et le cheval B la deuxième place ».

Card N $= 1 \times 1 \times 4! = 24$

$$P(N) = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

2) Si le cheval A est premier et B est $2^{ème}$, le nombre de possibilités que E soit $3^{ème}$ est :

$$1 \times 1 \times 1 \times 3! = 6.$$

Exercice 3

$P(x) = ax^3 + bx^2 - 7x + c$, où a, b et c sont des réels.

1) $P(-2) = 0 \Leftrightarrow -8a + 4b + 14 + c = 0$,

$P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b - 7 + c = 0$,

et $P(0) = 6 \Leftrightarrow c = 6$.

on a le système d'équations $\begin{cases} -8a + 4b + 14 + c = 0 \\ a + b - 7 + c = 0 \\ c = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 4b + 20 = 0 \\ a + b - 1 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 4b = -20 \\ a + b = 1 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -5 \\ a + b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + b = -5 \\ a + b = 1 \quad \times 2 \end{cases}$$

$$0 + 3b = -3 \implies b = -1$$

$$a + b = 1 \implies a = 1 - b = 2$$

D'où $a = 2$, $b = -1$ et $c = 6$.

2/ $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$.

a/ $p(-2) = p(1) = 0$ donc : $p(x) = 2(x+2)(x-1)(x - x_0)$

or $p(0) = 6 \implies 4x_0 = 6$ d'où $x_0 = \frac{3}{2}$.

$\implies P(x) = 2(x+2)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

b/ $p(x) = 0$ donne $x = -2$ ou $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$

$$S = \{-2;\ 1;\ 3/2\}.$$

c/ i) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$

soit $P(\ln x) = 0$ pour $x > 0$, on a donc

$\ln x = 1$ soit $x = e$ ou

$\ln x = -2$ soit $x = \frac{1}{e^2}$ ou

$\ln x = \frac{3}{2}$ soit $x = e^{3/2} = e\sqrt{e}$.

or $e > 0$, $\frac{1}{e^2} > 0$ et $e\sqrt{e} > 0$ D'où $S = \left\{e;\ \frac{1}{e^2};\ e\sqrt{e}\right\}$.

ii) $-e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{7}{2}e^{x} < 3 \Leftrightarrow -2e^{3x} + e^{2x} + 7e^{x} < 6$

$\Leftrightarrow 2e^{3x} - e^{2x} - 7e^{x} + 6 > 0$ c'est-à-dire $P(e^{x}) > 0$

Soit $p(e^x) > 0$ on a donc

$$2(e^x+2)(e^x-1)(e^x-\frac{3}{2}) > 0$$

ce qui donne $(e^x-1)(e^x-\frac{3}{2}) > 0$

x	$-\infty$		0		$\ln\frac{3}{2}$		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x-\frac{3}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x-1)(e^x-\frac{3}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $S =]-\infty ; 0[\cup]\ln\frac{3}{2} ; +\infty[$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1) f est définie ssi $\frac{x+1}{x-1} > 0$ et $x \neq 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

2) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$? $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

• Idem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$? $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x+1}{x-1} = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.

. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$? on a $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

3/ $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$ est dérivable pour $x \neq 1$

$X \longmapsto \ln X$ est dérivable pour $X > 0$

par composée $x \overset{f}{\longmapsto} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est dérivable sur D_f.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \text{ pour tout } x \in D_f.$$