OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 825.24.58 – Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. a. Soit α une solution réelle de (E) alors α vérifie $\alpha^3 - 13\alpha^2 + 59\alpha - 87 = 0$.
Une solution évidente est 3.

D'où $\boxed{\alpha = 3.}$

1. b. $(z - 3)(z^2 - 10z + 29) = 0$.
D'où $z = 3$ ou $z^2 - 10z + 29 = 0$.
Après calculs $z = 3$ ou $z = 5 - 2i$ ou $z = 5 + 2i$.
L'ensemble des solutions est : $S = \{3\ ;\ 5 - 2i\ ;\ 5 + 2i\}$.

2. a. $\frac{b-a}{c-a} = -i$.

$$\begin{cases} \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

ABC est rectangle et isocèle en A et direct.

2. b. $\boxed{\text{Arg } Z \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi].}$

Z réel non nul sssi arg $Z \equiv 0\ (\pi)$.
$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0\ (\pi)$.
M décrit la droite (AB) privée de A et de B.

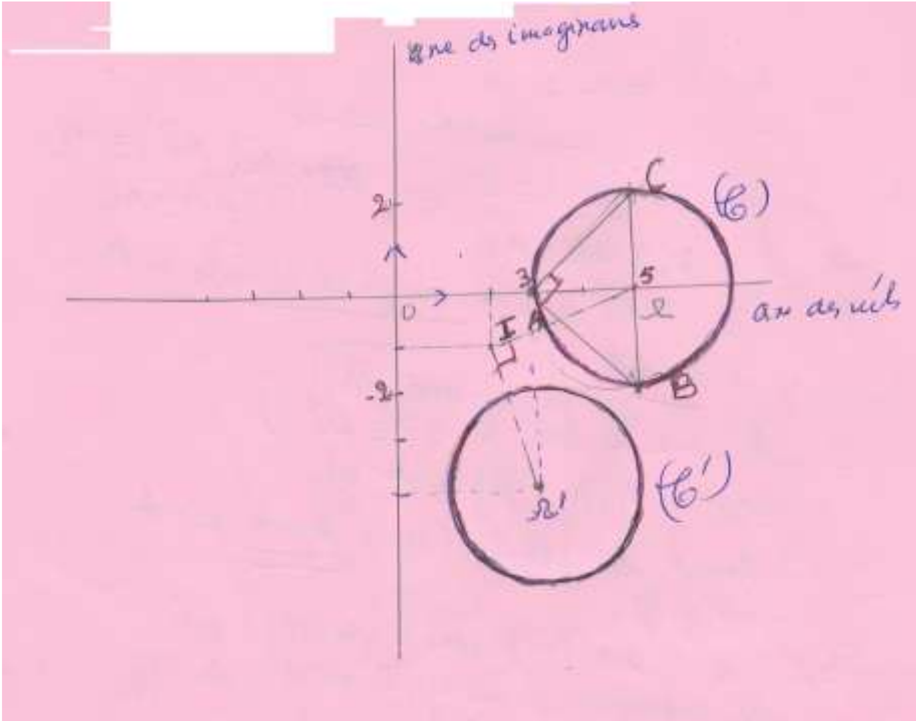
3. a. Soit M'(Z') l'image de M(Z) par la rotation r de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Donc $Z' - Z_i = e^{-\frac{\pi}{2}}(Z - Z_i)$.

On obtient $\boxed{Z' = -iZ + 3 + i.}$

3. b. Soit Ω centre du cercle circonscrit à ABC.
Ω est le milieu de [BC].
On a $Z_\Omega = \frac{Z_B + Z_C}{2}$ ce qui donne $\boxed{Z_\Omega = 5.}$

Soit $r(\Omega) = \Omega'$, $Z_{\Omega'} = -iZ_\Omega + 3 + i$. D'où $\boxed{Z_{\Omega'} = 3 - 4i.}$
Donc (C') est le cercle de centre Ω' et de même rayon que (C).

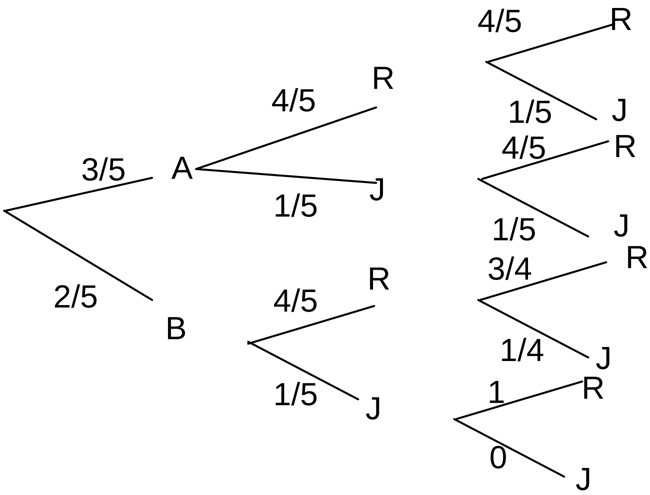
Figure :



EXERCICE 2

1. $p(A)= \frac{C_4^{\,2}}{C_5^{\,2}}$ $\boxed{p(A)= \frac{3}{5}.}$

$p(B)= \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_5^2}$ $\boxed{p(B)= \frac{2}{5}.}$



$p(C)= \frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}.$ $\boxed{p(C)= \frac{17}{25}.}$

$p(D)= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}.$ $\boxed{p(D)= \frac{3}{5}.}$

$p(E)= \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}+ \frac{1}{5} \times 1.$ $\boxed{p(E)= \frac{2}{5}.}$

$p(F)= \frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+ \frac{2}{5}\times \frac{1}{5}\times 1.$ $\boxed{p(F)= \frac{4}{25}.}$

2. a. $X(\Omega) = \{(R,R), (R,J), (J,R), (J,J)\}$.
Les différentes valeurs prises par X sont 0 ; 1000 et 2000.

a	0	1000	2000
P(X= a)	$\frac{3}{125}$	$\frac{44}{125}$	$\frac{78}{125}$

b. **Fonction de répartition**

- si $x < 0$, $F(x) = 0$.
- si $0 \leq x < 1000$, $F(x) = \frac{3}{125}$.
- si $1000 \leq x < 2000$, on a $F(x) = \frac{3}{125} + \frac{44}{125}$.

D'où si $1000 \leq x < 2000$, $\boxed{F(x) = \frac{47}{125}.}$

- si $x \geq 2000$ $F(x) = \frac{3}{5} + \frac{44}{125} + \frac{78}{125} = 1$.

3. $\boxed{p(G) = \left(\frac{78}{125}\right)^{50}}$ $\boxed{p(H) = \left(\frac{3}{125}\right)^{50}}$ $\boxed{p(I) = \left(\frac{44}{125}\right)^{50} + C_{50}^{25}\left(\frac{3}{125}\right)^{25}\left(\frac{78}{125}\right)^{25}.}$

PROBLEME

PARTIE A

1. a. g(x) existe si et seulement si:

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases}$ ce que donne $x > -1$.

$$\boxed{D_g =]-1, +\infty[.}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{-2(x+1)\ln(x+1)+x}{(x+1)},$$

$\boxed{\lim_{x \to -1^+} g(x) = -\infty}$ par quotient.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} -2\ln(x+1) \to -\infty \text{ par composée puis produit} \\ \dfrac{x}{x+1} \to 1 \end{cases},$$

1. b. $g'(x) = \frac{-2}{x+1} + \left(\frac{x}{x+1}\right)'$ $\boxed{g'(x) = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}.}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'(x)	‖	+	0	-	

Tableau de Variation

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'(x)	‖	+	0	-	
g	‖		2ln2-1		
	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

2. a. g(0) = 0.
La restriction de g à $]-1\,;\,-\frac{1}{2}[$ est strictement croissante et continue et prend ses valeurs dans
]-∞, 2ln 2-1[qui contient 0 donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]-1\,;\,-\frac{1}{2}[$ une solution unique α.
Idem sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet un solution unique 0 .
$]-0{,}72\,;\,-0{,}71[\subset]-1\,;\,-\frac{1}{2}[$ et g(−0,72) x g(−0,71) < 0 donc $\alpha \in]-0{,}72\,;\,-0{,}71[$.

2. b. 0 étant l'autre zéro de g :

x	-1		α		0		+∞
g(x)	‖	-	0	+	0	-	

PARTIE B
1. a. Domaine de définition de f.
f(x) existe si et seulement si :
- $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \ln(x+1) \neq 0, \end{cases}$
- ou $x \in]-\infty, -1]$,
- ou $x = 0$.

d'où $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ou $x \in]-\infty, -1]$ ou $x = 0$

$D_f = (]-1,+\infty[\setminus\{0\}) \cup]-\infty,-1] \cup \{0\}$.

$$\boxed{D_f = IR.}$$

Limites aux bornes du domaine de définition de f.

$\lim_{x\mapsto -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^2}{x+1} \times \frac{(x+1)}{\ln(x+1)} = +\infty$

$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty.$

1.b. Etudions la nature de la branche infinie au voisinage de$-\infty$.

$$\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\mapsto -\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) e^{-x-1} = +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

Donc $(\boldsymbol{C}_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.
Etudions la nature de la branche infinie au voisinage de$+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x+1}\ \frac{(x+1)}{\ln(x+1)} = +\infty.}$$

Donc $(\boldsymbol{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

2. a. $f(-1) = 0$.

$\lim_{x\mapsto -1^+} f(x) = 0$ par quotient et $\lim_{x\mapsto -1^-} f(x) = f(-1) = 0$.

D'où $\boxed{\lim_{x\mapsto -1^+} f(x) = \lim_{x\mapsto -1^-} f(x) = f(-1) = 0.}$

Donc f est continue en -1.

On a $f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} x \times \dfrac{x}{\ln(x+1)} = 0$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = f(0).}$

Donc f est continue en 0.

2. b. <u>Dérivabilité de f en -1</u>.

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1} \dfrac{(x+1)}{(x+1)} e^{-x-1} = 1.$

f dérivable en -1 à gauche et $\boxed{f'_g(-1) = 1.}$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{x^2}{(x+1)\ln(x+1)} = -\infty.$

Donc f non dérivable en -1 car non dérivable en -1 à droite.

<u>Interprétation</u> au point d'abscisse -1.
Au point d'abscisse -1, $(\boldsymbol{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale et une demi- tangente de pente 1 à gauche.

<u>Dérivabilité de f en 0.</u>

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{x}{\ln(x+1)} = 1.$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
<u>Interprétation</u> au point d'abscisse 0.
$(\boldsymbol{C}_f)$ admet à l'origine une tangente de coefficient directeur 1.

3. a. Pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$on a:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{2x\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} = \frac{-x\left(-2\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right)}{(\ln(x+1))^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x\, g(x)}{(\ln(x+1))^2}.}$$

Pour $x < -1$, $f'(x) = -xe^{-x-1}$.

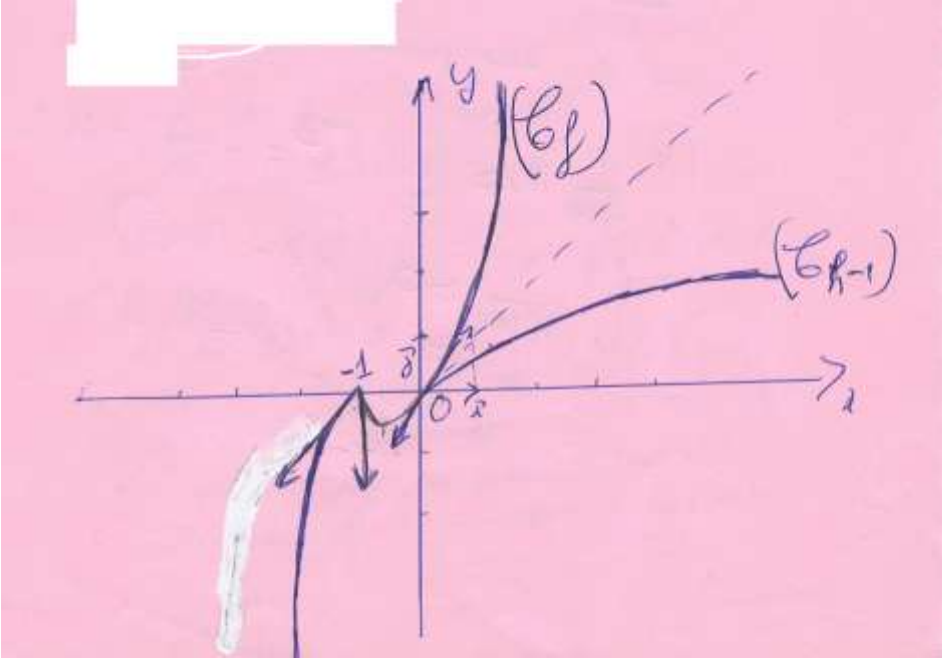
3. b.

x	$-\infty$		-1			α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1 ‖ $-\infty$		$-$	0		$+$		
f	$-\infty$	↗	0 ‖		↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

4. a. h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[= J$.

4. b. h^{-1} a le même sens de variation que h, elle est strictement croissante sur J.

4. c. Figure :



PARTIE C

1. a. Posons $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x+1}$

Avec $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \ln(x+1)$.

Sur $]0, +\infty[$ on a $m(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$. (R)

1. b. On a $m(x) = (u(x)v(x))'$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $H'(x) = m(x)$ avec $m(x) = (u(x)v(x))'$.

D'où on a: $H(x) = u(x)v(x) + c = -\frac{\ln(x+1)}{x} + c$.

On a sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{f(x)} = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

Or d'après (R): $\frac{\ln(x+1)}{x^2} = m(x) + \frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1} = m(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Soit G une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)}\,dx = \Big[G(x)\Big]_1^2 = \Big[H(x) + \ln\big(\frac{x}{x+1}\big)\Big]_1^2 = \Big[-\frac{\ln(x+1)}{x} + c + \ln\big(\frac{x}{x+1}\big)\Big]_1^2 = -\frac{3\ln 3}{2} + 3\ln 2.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)}\,dx = 3\left(\ln 2 - \ln\sqrt{3}\right) = 3\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$