UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01-19 G 18 Bis A-20
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRIGE

Exercice 1.

1. a. Si (x, y) est un couple d'entiers relatifs, $35x - 30y = 5(7x - 6y)$ est divisible par 5.

b. D_1 a aussi pour équation $35x - 30y = 12$.
12 n'est pas divisible par 5. Or si x et y sont des entiers relatifs, le premier membre de cette relation est divisible pas 5. Par conséquent, il n'existe pas de point de la droite D_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. Notons A_0 le point de D dont les coordonnées sont (x_0, y_0).

a. D a aussi pour équation $7qx - 6qy = 6p$.
L'appartenance de A_0 à D se traduit donc par $q(7x_0 - 6y_0) = 6p$. On y voit nettement que q divise $6p$.

b. q divise $6p$ et est premier avec p, q doit donc, d'après Gauss, diviser 6.

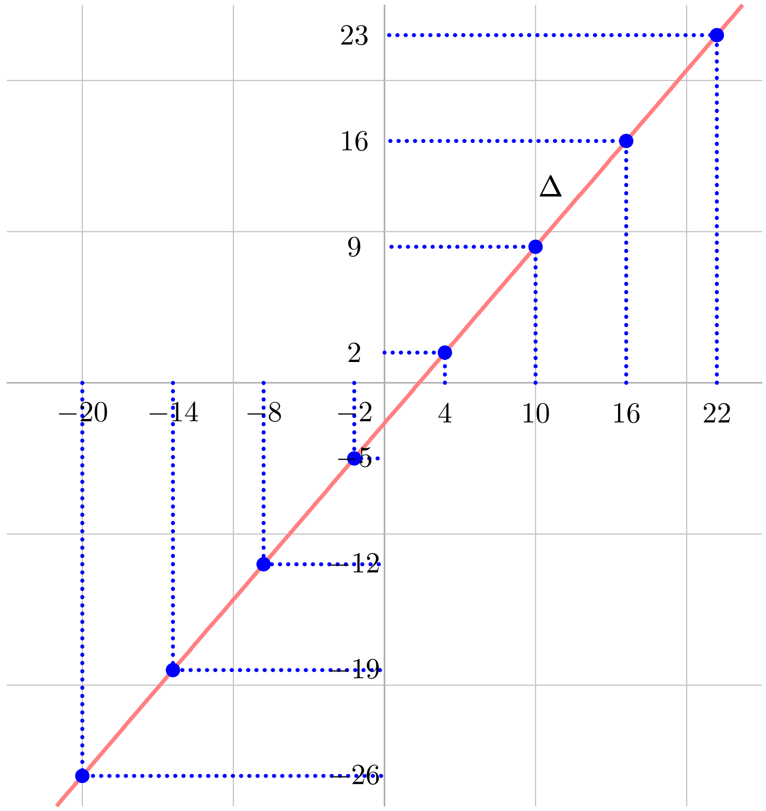
3. a. La relation $7u - qrv = 1$ s'écrit aussi $7u - 6v = 1$. Comme 6 et 7 sont premiers entre eux, cette dernière équation a certainement une solution d'après Bezout. D'ailleurs, on peut remarquer que le couple $(1, 1)$ est solution.

b.
Si (u, v) vérifie $7u - qrv = 1$, en multipliant par $\dfrac{p}{q}$ on obtient : $prv = \dfrac{7p}{q}u - \dfrac{p}{q}$ c'est à dire $prv = \dfrac{7}{6}pru - \dfrac{p}{q}$. On peut donc prendre $y_0 = rpv$ et $x_0 = rpu$

4. a. Dans le cas présent, $p = 8$ et $q = 3$ et donc oui ! Δ possède des points à coordonnées entiers relatifs car 3 divise 6.

b. Un point A_0 de coordonnées (x_0, y_0) appartient à Δ si et seulement si $7x_0 - 6y_0 = 16$.
Le couple $(16, 16)$ est une solution de cette équation. La solution générale de l'équation est donc

$$x_0 = 16 + 6\alpha, y_0 = 16 + 7\alpha, \quad \alpha \text{ entier relatif quelconque}$$



Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(0, 0, 3\sqrt{2}), B(4, 0, -\sqrt{2}), C(-2, -2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ et $D(-2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

1. a. On a $AB = AC = BC = \sqrt{48}$. Donc, le triangle ABC est équilatéral.

b. Pour que les quatre points soient non coplanaires, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ soit non nul. Ce qui est le cas.
Le tétraèdre $ANCD$ est régulier car

$$AB = BC = CD = AD = DB = CA = 4\sqrt{3}$$

c. Le volume du tétraèdre est $\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 16\sqrt{6}$ unités de volume.

Puisque le tétraèdre est régulier, on peut aussi dire que son volume est $\dfrac{\sqrt{2}}{12}AB^3 = 16\sqrt{6}$ unités de volume.

2. a. $P(-1, -\sqrt{3}, \sqrt{2}), Q(-1, \sqrt{3}, \sqrt{2}), R(1, \sqrt{3}, -\sqrt{2}), S(1, -\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.
On voit bien que O est le milieu du segment $[PR]$ et celui du segment $[QS]$, donc $PQRS$ est un parallélogramme.
De plus, les diagonales $[PR]$ et $[QS]$ sont de même longueur et de supports perpendiculaires. Donc,$PQRS$ est un carré.

b. Le carré $PQRS$ a pour côté $\dfrac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$. Son aire est donc 12 unités d'aire.

3. Pour que le produit des six chiffres soit non nul, il faut et il suffit qu'aucun de ces six chiffes ne soit égal à 0.

La face numérotée 0 doit donc être cachée à chaque lancer. En un lancer, la probabilité que le 0 soit caché est $\frac{1}{4}$; donc $p(E) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

Pour un lancer, les sommes possibles sont $5, 4$ et 3. Pour les deux lancers, les sommes possibles sont résumées dans le tableau à double entrée ci-contre. Dans ce tableau, on voit qu'il y a 8 case contenant un nombre supérieur ou égal 8.

Comme le nombre total de cases contenant des sommes est $4^2 = 16$, $p(F) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

L_1 \ L_2	5	4	3	3
5	10	9	8	8
4	9	8	7	7
3	8	7	6	6
3	8	7	6	6

4. a. Le tableau ci-dessus donne aussi toutes sommes possibles : La variable X prend ses valeurs x_i dans l'ensemble $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ avec les probabilités p_i suivantes :

$p(X = 6) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; p(X = 7) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; p(X = 8) = \frac{5}{16}; p(X = 9) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ et $p(X = 10) = \frac{1}{16}$.

b. L'événement G_n « F soit réalisé au moins une fois sur les n répétitions » a pour complémentaire $\overline{G_n}$: « F n'est pas réalisé sur les n répétitions » $p(\overline{G_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Donc $p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

PROBLEME.

Partie A

1. a. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, car pour tout $x \geq 0, e^x \geq 1$.

La fonction $h\ : x \to 1 - e^{-x}$ est donc ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule seulement au point 0.

Pour tout $t > 0$ on a $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\sqrt{1 - e^{-t}}}{t} = \sqrt{\frac{1}{t} \quad \frac{e^{-t} - 1}{-t}}$.

Quand t tend vers 0^+, le rapport $\frac{1}{t}$ tend vers $+\infty$ et le le rapport $\frac{e^{-t} - 1}{-t}$ tend vers $exp'(0) = 1$. Par conséquent, $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = +\infty$, la fonction f n'est pas dérivable en 0 et au point de la courbe d'abscisse 0 (c'est l'origine), il y a une demi tangente verticale.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} = \frac{e^{-x}}{2f(x)}$$

f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante sur son domaine et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe. Voici le tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2f(x)}$. Donc $1 - f'(x) = \dfrac{2f(x) - e^{-x}}{2f(x)}$

Mais la fonction $g \ : x \to 2f(x) - e^{-x}$ est strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée $x \to 2f'(x) + e^{-x}$ est > 0.

Donc $\forall x \in I = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[, g(x) \geq g\left(\dfrac{1}{2}\right) \sim 1.6 > 0$. Par conséquent, $\forall x \in I, 1 - f'(x) > 0$, autrement dit $f'(x) < 1$.

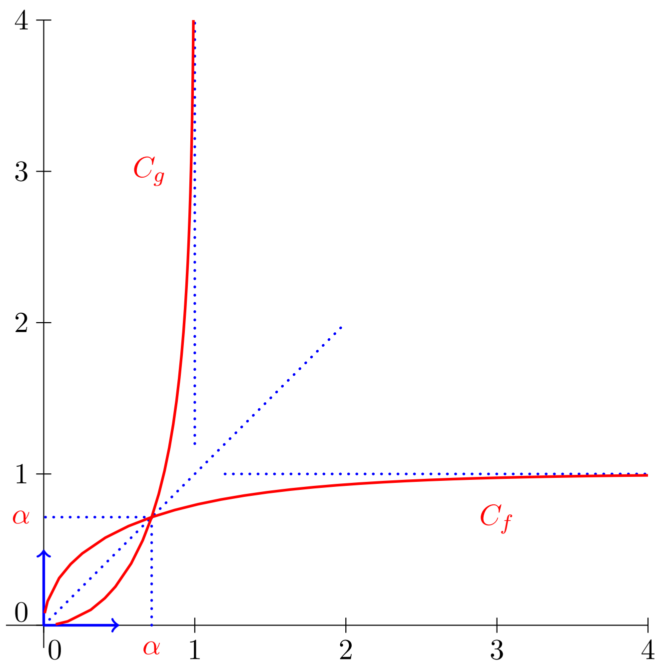
La fonction $\varphi \ : x \to f(x) - x$ est continue sur I. $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) \sim -0.37 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

φ est dérivable et $\forall x \in I, \varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$; la fonction φ est dons strictement décroissante.

On déduit de cela que l'équation $\varphi(x) = 0$ (c'est à dire $f(x) = x$) une unique solution α.

Comme $\varphi(0,7) \sim -0.0095 < 0$ et $\varphi(0,8) \sim 0.0579 > 0$, α appartient bien à l'intervalle $]0.7, 0.8[$.

d.



2. a. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante ; elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $J = f(\mathbb{R}_+) = [0, 1[$

b. La courbe de g est symétrique à celle de f par rapport à la première bissectrice.

c. Pour tout y appartenant à J, il existe un unique x dans $\mathbb{R}_+$ tel que $y = f(x)$. Comme y est positif, ceci est équivalent à $y^2 = 1 - e^{-x}$ ou encore $x = -\ln(1-y^2)$.

Finalement, $\forall x \in J, g(x) = -\ln(1-x^2)$.

Partie B

1. a. On a pour tout $x \in J$,

$$F_2(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^2 dt = \int_0^{g(x)} (1-e^{-t})dt = [t + e^{-t}]_0^{g(x)} = g(x) + e^{-g(x)} - 1 = g(x) - x^2$$

Alors $I_2 = F_2(\alpha) = g(\alpha) - \alpha^2 = \alpha - \alpha^2$

2. a. La fonction g est dérivable sur $[0, 1[$ et pour tout $x \in J, g'(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons pour tout $u \in \mathbb{R}_+, H_n(u) = \displaystyle\int_0^u [f(t)]^n \, dt$.

Puisque f est continue, H_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+, H_n'(u) = [f(u)]^n$

Comme $F_n = H_n \circ g$, la fonction F_n est dérivable dans J et

$$\forall x \in J, F_n'(x) = H_n'(g(x)).g'(x) = [f(g(x))]^n .g'(x) = x^n \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}.$$

b. Pour trouver a, b et c vérifiant $\dfrac{2x^2}{1-x^2} = a + \dfrac{b}{1-x} + \dfrac{c}{1+x}$ pour tout x distinct de 1 et -1, on réduit le second membre au même dénominateur et on identifie les numérateurs des deux membres. On obtient : $a = -2, a+b+c = 0$ et $b - c = 0$ c'est à dire $a = -2, b = c = 1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \neq 1 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{1-x^2} = -2 + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

c. D'après ce qui précède, $\forall x \geq 0, F_1'(x) = \dfrac{2x^2}{1-x^2} = -2 + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

Par conséquent, il existe une constante réelle c telle que

$$\forall x \geq 0, F_1(x) = -2x - \ln(1-x) + \ln(1+x) + c.$$

Pour trouver la valeur de cette constante, il suffit de donner à x une valeur appartenant à l'ensemble de définition de F_1.

Par exemple, en prenant $x = 0$, on trouve $F_1(0) = c$ c'est à dire $c = 0$. Finalement

$$\begin{array}{lll} F_1(x) & = & -2x - \ln(1-x) + \ln(1+x) = -2x + \ln \dfrac{1-x}{1+x} \\ \text{et} \quad I_1 & = & F_1(\alpha) = -2\alpha + \ln \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} \end{array}$$

d. Comme $g(\alpha) = \alpha$, l'aire demandée est égal en unités d'aires à

$$\int_0^{\alpha} f(t) \, dt = \int_0^{g(\alpha)} f(t) \, dt = F_1(\alpha) = -2\alpha + \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Partie C

1. a. $F'_{n+2}(x) - F'_n(x) = \dfrac{2x^{n+3}}{1-x^2} - \dfrac{2x^{n+1}}{1-x^2} = -2x^{n+1}$.

Il existe donc une constante c_n telle que pour tout $x \in J, F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\dfrac{2}{n+2}x^{n+2} + c_n$.

Pour connaitre la valeur de cette constante, on évalue l'expression précédente au point $x = 0$. On trouve $c_n = 0$.

Finalement, $x \in J, F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\dfrac{2}{n+2}x^{n+2}$.

b. On en déduit, en donnant à x la valeur α, $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$

2. a. Posons $a_p = I_{2p}$.

L'expression $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$ devient, en remplaçant n par $2p$

$$a_{p+1} - a_p = -\frac{1}{p+1}\alpha^{2p+2}$$

Pour tout entier $n \geq 2$ en sommant de 1 à $n-1$, on trouve

$$a_n - a_1 = -\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}\alpha^{2p+2} = -\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = I_2 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{2k} = \alpha - \alpha^2 - \sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k} = \alpha - \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$.

Posons $b_p = I_{2p+1}$.

L'expression $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$devient, en remplaçant n par $2p+1$

$$b_{p+1} - b_p = -\frac{2}{2p+3}\alpha^{2p+3}$$

Pour tout entier $n \geq 1$ en sommant de 0 à $n-1$, on trouve

$$b_n - b_0 = -2\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+3}\alpha^{2p+3} = -2\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2n+1} = I_1 - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = -2\alpha + \ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = \ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - 2\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}.$$

3. a. $g(\alpha) = \alpha$. On a pour tout $x \in [0, \alpha], 0 \leq f(x) \leq x \leq \alpha$.

On élève à la puissance n et on intègre de 0 à $g(\alpha)$:

$$0 \leq \int_0^{g(\alpha)}[f(x)]^n dx = \int_0^{\alpha}[f(x)]^n dx \leq \int_0^{\alpha}\alpha^n dx = \alpha^{n+1}$$

autrement dit $0 \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$.

b. Puisque $\alpha \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^{n+1} = 0$; on déduit alors de cette relation et du théorème des gendarmes que la suite (I_n) est convergente et de limite 0.

Par conséquent les suites (I_{2n}) et (I_{2n+1}) extraites de la suite (I_n), sont aussi convergentes et de limite 0.

Les relations $I_{2n} = \alpha - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $I_{2n+1} = \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$ entrainent

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{k} = \alpha \text{ et } \lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$