UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

16 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Exercice 1.

1. L'application complexe F correspondant à f est de la forme $F(z) = az + b$ avec $a = \frac{1}{3}j^2$ et $b = 0$. C'est donc la similitude plane directe d'angle $\theta = \arg a = 2\arg j = \frac{4\pi}{3}$, de rapport $k = |a| = \frac{1}{3}$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = 0$ c'est à dire l'origine.

2. a. Un point M' d'affixe z' appartient à $f(\mathcal{E})$ si et seulement si il existe un point M de $\mathcal{E}$ d'affixe z tel que $F(z) = z'$ c'est à dire $z = \frac{3}{j^2}z'$.

Alors en tenant compte des indications sur j on a :

$$\begin{aligned}
M'(z') \in f(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow M(z) \in \mathcal{E} \\
&\Leftrightarrow j\ z^2 + \overline{j\ z^2} - \frac{10}{3}z\overline{z} + 192 = 0 \\
&\Leftrightarrow j\left(\frac{3}{j^2}z'\right)^2 + \overline{j\left(\frac{3}{j^2}z'\right)^2} - \frac{10}{3}\frac{3}{j^2}z'\overline{\left(\frac{3}{j^2}z'\right)} + 192 = 0 \\
&\Leftrightarrow 9z'^2 + \overline{9z'^{\,2}} - 30z'\overline{z'} + 192 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3z'^2 + 3\overline{z'^{\,2}} - 10z'\overline{z'} + 64 = 0
\end{aligned}$$

Si z' s'écrit $x' + iy'$, alors

$$\begin{aligned}
M'(z') \in f(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow 3(z'^2 + \overline{z'^{\,2}}) - 10z'\overline{z'} + 64 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3 \times 2\ \mathbb{R}e(z'^2) - 10(x'^2 + y'^2) + 64 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3 \times 2(x'^2 - y'^2) - 10(x'^2 + y'^2) + 64 = 0 \\
&\Leftrightarrow x'^2 + 4y'^2 = 16
\end{aligned}$$

L'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est bien une équation cartésienne de $f(\mathcal{E})$.

b. Cette dernière équation s'écrit aussi $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

$f(\mathcal{E})$ est donc une ellipse de centre l'origine.

Ses foyers F_1' et F_2' ont pour coordonnées respectives $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ avec $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. Son excentricité est $e = \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Les foyers et axes de $\mathcal{E}$ sont les images réciproques des foyers et axes de $f(\mathcal{E})$ par la similitude réciproque de f, laquelle a pour centre O, pour angle $-\theta = -\frac{4\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et pour rapport $\frac{1}{k} = 3$.

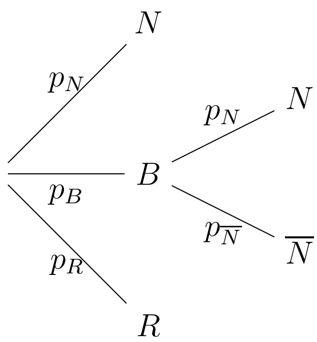
Voir les graphiques de $f(\mathcal{E})$ et de $\mathcal{E}$ dans la figure 1.

Exercice 2.

Le nombre total de boules est $n + (8+n) + 20 = 28 + 2n$.

1.

Notons p_N, p_B et p_R les probabilités de tirer une noire, une blanche et une rouge respectivement. Puisque les tirages sont avec remise, ces probabilités sont indépendantes du numéro (premier ou second) du tirage.



$p_N = \dfrac{8+n}{28+2n}; p_B = \dfrac{20}{28+2n}; p_R = \dfrac{n}{28+2n};$

Pour gagner, il faut avoir tiré une noire au premier tirage (probabilité p_N) ou avoir tiré une blanche au premier tirage et une noire au second tirage (probabilité $p_B \times p_N$). Donc la probabilité de gagner est $p_N + p_B \times p_N = \dfrac{(n+8)(n+24)}{2(n+14)^2} = f(n)$.

2. a. Etudions d'abord les variations de f.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2\dfrac{-x+16}{(x+14)^3}$. Voici son tableau de variations.

x	0	1	16	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$1/2$	$8/15$	$1/2$

On y voit nettement que f atteint un maximum égal à $\frac{8}{15}$ au point 16 (qui est heureusement un entier).

Pour que cette probabilité soit maximale, il faut donc et il suffit que $n = 16$ et cette probabilité vaut $\frac{8}{15}$.

b. La restriction de f à $\mathbb{N}^*$ atteint un minimum égal à $\frac{1}{2}$ au point 1.

Pour que cette probabilité soit minimale, il faut donc et il suffit que $n = 1$ et cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$.

Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $\frac{1}{2}$ mais cette valeur n'est pas atteinte par f dans l'intervalle $[16, +\infty[$

3. a. X prend les valeurs $x_1 = p-8$, $x_2 = q-8$ et $x_3 = -8$ avec les probabilités

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X=x_1) = p_N = \frac{2}{5} \\ p_2 &= P(X=x_2) = p_B \times p_N = \frac{2}{15} \\ p_3 &= P(X=x_3) = 1 - p_1 - p_2 = \frac{7}{15} \\ &= \text{aussi } p_R + p_B \times p_{\overline{N}} = \frac{n}{28+2n} + \frac{20}{28+2n}\Big(1 - \frac{8+n}{28+2n}\Big) \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \frac{2}{5}(p-8) + \frac{2}{15}(q-8) + \frac{7}{15}(-8) = \frac{2}{5}p + \frac{2}{15}q - 8$$

b. La nullité de l'espérance mathématique signifie donc $3p + q = 60$.

Le couple $(p_0, q_0) = (20, 0)$ est une solution "particulière" de l'équation diophantienne $3p + q = 60$. La solution générale de cette équation est donc

$$q = 3k + q_0 = 3k \text{ et } p = -k + p_0 = -k + 20, k \in \mathbb{Z}$$

Les contraintes supplémentaires sur p et q deviennent $-k+20 > 3k > 8$ c'est à dire $\frac{8}{3} < k < 5$. k vaut donc 3 ou 4 et les couples (p, q) possibles sont $(17, 9)$ et $(16, 12)$.

4. Pour $p = 16$ et $q = 12$, on sait d'après ce qui précède que l'espérance mathématique est nulle. La variance vaut alors $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2)$

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 = \frac{2}{5}8^2 + \frac{2}{15}4^2 + \frac{7}{15}8^2 = \frac{18 \times 16}{5}$$

Et l'écart type vaut $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 4\sqrt{\frac{18}{5}}$

PROBLEME.

Partie A

1. a.

La fonction $\varphi : x \mapsto x - 1 - \ln x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

La dérivée s'annule au point 1 et est > 0 si et seulement si $x > 1$. Voici le tableau de variations de φ.

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

On y voit nettement que la fonction φ est positive ; donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

Soit x un réel > 0 et k un entier naturel non nul. Dans la relation précédente, en remplaçant x par $\frac{x}{k}$, on a $\ln \frac{x}{k} \leq \frac{x}{k} - 1$ puis par intégration :

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln \frac{x}{k}\, dx \leq \int_{k-1/2}^{k+1/2} \Big(\frac{x}{k} - 1\Big)\, dx = \Big[\frac{x^2}{2k} - x\Big]_{x=k-1/2}^{x=k+1/2} = 0$$

b. En sommant les relations précédentes de $k = 1$ à $k = n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln \frac{x}{k}\, dx \leq 0 \text{ puis } \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1/2}^{k+1/2} (\ln x - \ln k)\, dx \leq 0$$

ensuite, avec la relation de Chasles :

$$\int_{1/2}^{n+1/2} \ln x\, dx - \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq 0 \text{ ou } \int_{1/2}^{n+1/2} \ln x\, dx - \ln(n!) \leq 0$$

c. Comme $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$ (résultat que l'on obtient par intégration par parties),

$$\Big[x\ln x - x\Big]_{1/2}^{n+1/2} - \ln(n!) \leq 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \ln\sqrt{2} \geq 0$$

2. a.

La fonction g est définie, continue et dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[, g'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Voici le tableau de variations de g.

x	0	1
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

b.

- Pour tout x dans $]0,1[$, la fonction h est continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$ et pour tout $u \in]0,x[, h'(u) = g(u)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans l'intervalle $]0,x[$ tel que $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(c)$ c'est à dire $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = g(c)$ ou $f(x) = g(c)$. Mais puisque la fonction g est croissante $g(0) \leq g(c) \leq g(x)$; donc $1 \leq f(x) \leq g(x)$.

- Si on veut utiliser la valeur moyenne de g on peut dire : La fonction g étant continue, $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$, valeur moyenne de g sur $[0,x]$ est une valeur de g ; il existe donc c dans $[0,x]$ tel que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = g(c)$.

La fonction g étant continue, sa limite en 0 est $g(0) = 1$. Alors les inégalités $1 \leq f(x) \leq g(x)$ et le théorème des gendarmes entraînent que f aussi a pour limite $1 = f(0)$ quand x tend vers 0 et donc oui ! f est continue en 0.

c. Pour montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in I, g(t) = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$, il suffit de réduire au même dénominateur et d'identifier les numérateurs. On trouve $a = b = \dfrac{1}{2}$ puis $g(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right)$.

On en déduit par intégration que

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{2x}\Big[\ln(1+t) - \ln(1-t)\Big]_0^x = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

3. a. Un calcul direct montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\Big[(n+1)!\Big] - \left(n+1+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + n + 1 - \ln(n!) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n \\ &= 1 - \frac{2n+1}{2}\ln\frac{n+1}{n} \\ &= 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

Puisque pour tout x de $[0,1[$, $f(x)$ est ≥ 1, cette dernière relation entraine que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n$ est ≤ 0 ; la suite (u_n) est donc décroissante.

b.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= \ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n \\ &\geq \ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) \text{ car ln est croissante} \\ &\geq \ln\sqrt{2} \text{ d'après la question 1.c} \end{aligned}$$

c. La suite (u_n) étant décroissante et minorée est convergente.

Partie B

1. a. $v_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n$ est ≥ 0 puisque intégrale d'une fonction continue ≥ 0. [1]

$v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t(\sin t - 1)\,dt$ est ≤ 0 puisque intégrale d'une fonction ≤ 0. La suite (v_n) est donc décroissante.

b. Pour tout entier naturel n, en posant $u = \sin^{n+1} t$ et $v' = \sin t$, on a $u' = (n+1)\sin^n t \cos t$ et on peut prendre $v = -\cos t$; une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t\ dt \\ &= \big[uv\big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t\ dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t(1-\sin^2 t)\ dt \\ &= (n+1)(v_n - v_{n+2}) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne bien $v_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, v_n$.

c. On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} &= \frac{v_{n+2}}{v_n} \\ &\leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ car la suite } (v_n) \text{ est décroissante} \\ &\leq 1 \text{ car la suite } (v_n) \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{n+1}{n+2}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes appliqué à la relation $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

d. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)v_{n+2}v_{n+1}}{(n+1)v_{n+1}v_n} = 1$; la suite (a_n) est donc constante. Cette constante est égale à $a_0 = v_1 v_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

e. $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n}{n+1} a_n \dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{n}{n+1}(n+1)v_{n+1}v_n\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = nv_n^2$.

Comme la suite (a_n) est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$, la relation précédente s'écrit aussi :
$nv_n^2 = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\dfrac{\pi}{2}$; donc $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} nv_n^2 = \frac{\pi}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = v_{2n}$

a. $n\ b_n^2 = \dfrac{1}{2}2nv_{2n}^2 = \dfrac{1}{2}\beta_{2n}$ avec $\beta_n = nv_n^2$. et puisque la suite β_n a pour limite $\dfrac{\pi}{2}$, on peut écrire d'après les indications de l'énoncé : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n\, b_n^2 = \frac{1}{2}\lim_{n\mapsto+\infty}\beta_{2n} = \frac{\pi}{4}$

b. Pour tout entier naturel n, appelons P_n la propriété : $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \dfrac{\pi}{2}$.

---

1. En toute rigueur, il faut établir que $v_n > 0$ pour légitimer la division par v_n. Pour cela, on peut dire que c'est l'intégrale d'une fonction continue, ≥ 0 et non identiquement nulle (d'ailleurs, elle s'annule seulement en 0), ou que $v_n \geq \displaystyle\int_1^{\pi/2} \sin^n t\ dt$ qui est > 0 car intégrale d'une fonction continue et > 0. On accordera la note maximale à un candidat qui se contentera de prouver $v_n \geq 0$

$b_0 = v_0 = \dfrac{\pi}{2}$, P_0 est donc vraie.
Supposons P_n vraie pour un entier donné n.
Alors, avec la relation (E) on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= v_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\, v_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\, b_n \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \text{ car } P_n \text{ est supposé vraie} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\big[2(n+1)\big]!}{2^{2n+2}\big[(n+1)!\big]^2}\,\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

P_{n+1} est donc vraie.

3. a. Pour tout entier n on a : $\mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{\ln n!}\,\mathrm{e}^n\,\mathrm{e}^{-\left(n+1/2\right)\ln n} = n!\,\mathrm{e}^n\,n^{-n-1/2} = n!\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b. Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{u_{2n}-2u_n} &= \frac{\mathrm{e}^{u_{2n}}}{(\mathrm{e}^{u_n})^2} \\ &= (2n)!\left(\frac{\mathrm{e}}{2n}\right)^{2n}\frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \left[\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}\right]^2 \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\sqrt{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} b_n\sqrt{2n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{n b_n^2} \end{aligned}$$

La constante A demandée vaut donc $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$

On en déduit que $\mathrm{e}^{u_{2n}-2u_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{n b_n^2}$ a pour limite $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Mais si ℓ est la limite de (u_n) alors $\mathrm{e}^{u_{2n}-2u_n}$ a aussi pour limite $\mathrm{e}^{\ell-2\ell} = \mathrm{e}^{-\ell}$.
Par conséquent $e^{-\ell} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ c'est à dire $\ell = \ln\sqrt{2\pi}$ et e^{u_n} a pour limite $\mathrm{e}^{\ell} = \sqrt{2\pi}$.

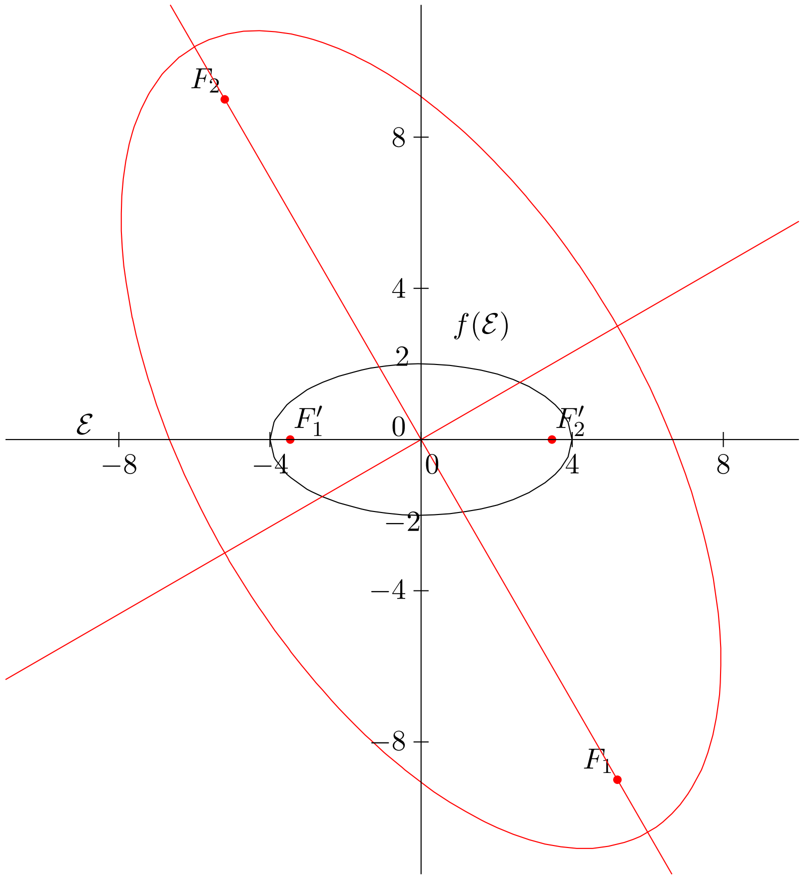


Figure 1. Figure de l'exercice 1