M A T H E M A T I Q U E S

Corrigé

Exercice 1 : 4 points

1) On admet que tout entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteur premiers.

Donnons la décomposition en produit de facteur premiers 524 et de 629.

$524 = 2^4 \times 131.$
$629 = 17 \times 37.$ **0,5pt**

2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère l'ensemble Γ des points de coordonnées (x,y,z) tels que : $z = xy$ et l'ensemble C des points de coordonnées (x,y,z) tels que : $x^2+z^2=1$.

$\Gamma = \{M(x,y,z)/\ z = xy\}$.

$C = \{M(x,y,z)/x^2+z^2=1\}$.

a) Démontrons que les coordonnées (x,y,z) des points d'intersection de Γ et de C vérifient la relation : $x^2(1+y^2)=1$.

$$\mathrm{M}(x,y,z) \in \Gamma \cap \mathrm{C} \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2+x^2y^2=1$$
$$\Rightarrow x^2(1+y^2)=1.$$ **0,5pt**

b) Déduisons-en que Γ et C ont deux points communs dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Soients x,y,z des entiers relatifs.

$$\mathrm{M}(x,y,z) \in \Gamma \cap \mathrm{C} \Rightarrow x^2(1+y^2)=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ 1+y^2=1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x^2=-1 \\ 1+y^2=-1 \end{cases}$$

Le deuxième système étant impossible car $x^2>0$, on a :

$$x^2(1+y^2)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ 1+y^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Ainsi, les deux points d'intersection à coordonnées entières possibles sont alors $\mathrm{I}(1;0;0)$ et $\mathrm{J}(-1;0;0)$. Et comme ils appartiennent tous les deux à l'intersection, on peut conclure que Γ et C ont deux points communs dont les coordonnées sont des entiers. Ces deux points sont $\mathrm{I}(1;0;0)$ et $\mathrm{J}(-1;0;0)$. **0,5pt**

3) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a) Déterminons l'ensemble des points d'intersection de Γ et de P_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

$$\mathrm{M}(x,y,z) \in P_1 \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 5 \\ z = 5 \end{cases}$$

Etant donné que x, y et z doivent être des entiers, le dernier système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ z = \ \ 5 \end{cases}$$

Donc les points d'intersections de P_1 et Γ à coordonnées entières sont les points

$\mathrm{I}_1(1;5;5)$ et $\mathrm{I}_2(-1;-5;5)$ **0,5 pt**

Dans la suite, on suppose $n > 1$.

b) Vérifions que : $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$.

$$(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = \big((n^2 + 2) - 2n\big)\big((n^2 + 2) + 2n\big)$$

$$= (n^2 + 2)^2 - 4n^2$$

$$= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2$$

$$= n^4 + 4$$ **0,5 pt**

c) Démontrons que pour tout $n > 1$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

On a : $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

Comme $n > 1$ $\quad n^2 > 1$

$2n > 2$

$2n + 2 > 4$

Par suite $n^2 + 2n + 2 > 5$. Donc, $n^2 + 2n + 2 \neq 1$.

D'autre part, $\quad n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (n - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow n = 1$

Ceci étant impossible par hypothèse, on a : $n^2 - 2n + 2 \neq 1$.

Ainsi, $n^4 + 4$ n'est pas premier car il possède deux diviseurs positifs différents de 1. **0,5 pt**

d) Déduisons-en que le nombre de points d'intersection de Γ et de P_n dont les coordonnées sont des entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

$$\mathrm{M}(x,y,z) \in P_n \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ z = n^4 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ xy = n^4 + 4 \end{cases}$$

Comme $n^4 + 4$ a au moins 4 diviseurs positifs qui sont 1 , $n^4 + 4$, $n^2 - 2n + 2$ et $n^2 + 2n + 2$, alors x peut prendre au moins 8 valeurs distinctes de même que y, ce qui est suffisant pour prouver que $P_n \cap \Gamma$ posséde au moins 8 points d'intersections à coordonnées entières. **0,5pt**

e) Déterminons l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_5 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

$$\mathrm{M}(x,y,z) \in P_5 \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ z = 5^4 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ z = 629 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = 629.$$

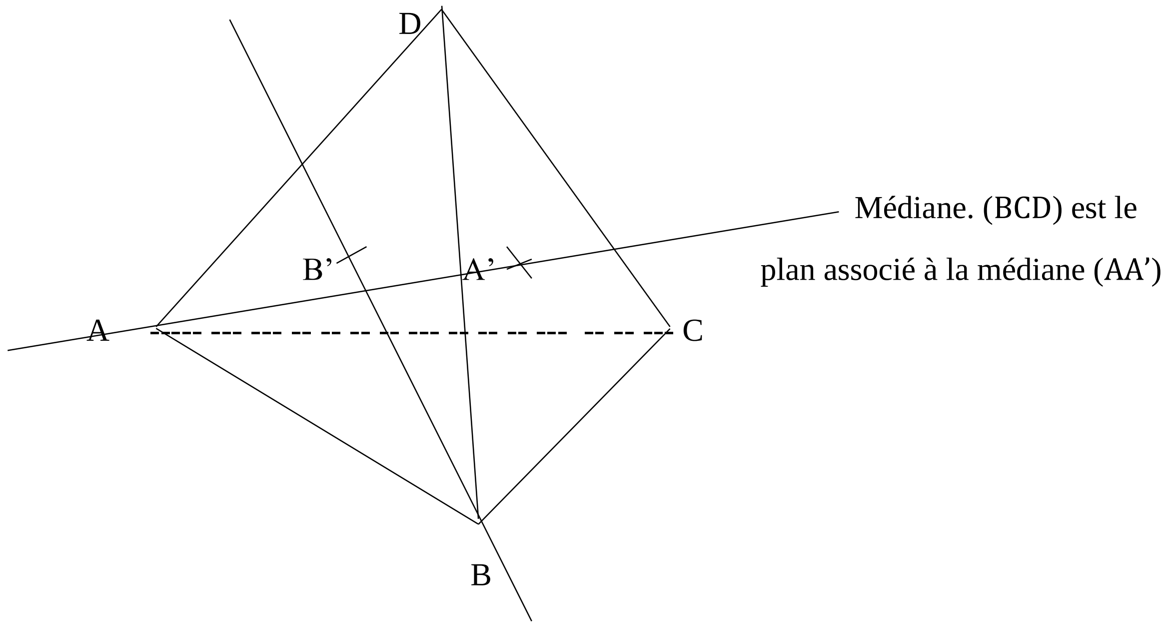
Comme x , y et z sont des entiers et que $629 = 17 \times 37$, alors $xy = 629$ entraine que : $x = 1$ ou $x = 17$ ou $x = 37$ ou $x = 629$ ou $x = -1$ ou $= -17$ ou $x = -37$ ou $x = -629$. **(17 et 37 sont des nombres premiers)**

Par conséquent les points d'intersection de Γ et de P_5 ont pour coordonnées :$(1; 629; 629)$, $(17; 37; 629)$, $(37; 17; 629)$, $(629; 1; 629)$, $(-1; -629; 629)$, $(-17; -37; 629)$, $(-37; -17; 629)$, $(-629; -1; 629)$. **0,5pt**

Exercice 2

Dans un tétraèdre, la droite passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposée à ce sommet est appelée médiane et cette face est appelée face associée à cette médiane.

Soit ABCD un tétraèdre régulier et A' le centre de gravité du triangle BCD. Ainsi la droite (AA') est une médiane du tétraèdre ABCD de face associée (BCD).



1) On veut démontrer la propriété ($\boldsymbol{P}$) : dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à son plan de sa face associée.

a) Montrons que : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0$.
Soit A_1 le milieu de [BD].
On a : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A'}).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{A_1A'}.\overrightarrow{BD}$.
Or, $(AA_1) \perp (BD)$ car (AA_1) est une médiane du triangle équilatéral ABD.
Donc, $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BD} = 0$.
De même, $(A_1A') \perp (BD)$ car (A_1A') est une médiane du triangle équilatéral BCD du fait qu'elle passe par le milieu A_1 de [BD] et par le centre de gravité A$'$ du triangle BCD.
Donc $\overrightarrow{A_1A'}.\overrightarrow{BD} = 0$.
On en déduit que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = 0$.
On démontre de même que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0$

NB : *Le candidat doit expliciter la démonstration de ce dernier point.* **1 pt**

b) Montrons alors que chaque médiane est orthogonale au plan de sa face associée.
On a : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0$. Donc $(AA') \perp (BD)$ et $(AA') \perp (BC)$
La droite (AA') étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD) qui est le plan de sa face associée, elle est orthogonale à (BCD).
Notons B' le centre de gravité du triangle ACD, C' le centre de gravité du triangle ABD et D' le centre de gravité du triangle ABC.
On démontre de même que chacune des médianes (BB'), (CC') et (DD') est orthogonale au plan de sa face associée.

NB : *Le candidat doit expliciter la démonstration de ce dernier point.* **1 pt**

2) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D.
On veut démontrer que G appartient à chacune des médianes de ABCD.
Montrons que G appartient à la médiane (AA') .
G=bary$\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$
A'=bary$\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$ alors d'après le théorème du barycentre partiel.
G=bary$\{(A,1),(A',3)\}$ d'où $G \in (AA')$.
On démontre de même que $G \in (BB')$, $G \in (CC')$, et $G \in (DD')$. **1pt**

3) l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points suivants : $P(1;2;3)$, $Q(4;2;-1)$ et $R(-2;3;0)$.

a) Montrons que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.
$OP^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$; $OQ^2 = 4^2 + 2^2 + (-1)^2 = 21$.
Comme $OP \neq OQ$, alors le tétraèdre OPQR n'est pas régulier. **0,5 pt**

b) Calculons les coordonnées de P', centre de gravité du triangle OQR.
$x_{P'} = \frac{x_O+x_Q+x_R}{3} = \frac{0+4-2}{3} = \frac{2}{3}$.
$y_{P'} = \frac{y_O+y_Q+y_R}{3} = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}$. P'$(\frac{2}{3};\frac{5}{3};-\frac{1}{3})$. **0,5 pt**
$z_{P'} = \frac{z_O+z_Q+z_R}{3} = \frac{0-1+0}{3} = -\frac{1}{3}$.

c) Vérifions qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est $3x + 2y + 16z = 0$.

Il suffit de vérifier que les coordonnées des points O, Q et R vérifient l'équation. **0,5 pt**

d) Vérifions si (PP’) est orthogonal à (OQR).

$\overrightarrow{PP'}(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{10}{3})$ et $\vec{n}(3; 2; 16)$ est normal à (OQR).
On a : $\overrightarrow{PP'}$ non colinéaire à $\vec{n}$.
Donc, la médiane (PP') n’est pas orthogonale au plan de sa face associée (OQR).
Par suite la propriété (P) n’est pas vérifiée dans un tétraèdre quelconque. **0,5 pt**

PROBLEME (11 points)

Pour tout entier naturel, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{1}{x(1+x)^n}$ et C_n sa courbe représentative dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

Partie A

1) Etudions les variations de f_n, puis dressons son tableau de variation.

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1+x)^n} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(1+x)^n} = 0.$$

f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall\, x > 0$

$$f'_n(x) = -\frac{(1+x)^{n-1} \times (1+x(n+1))}{(x(1+x)^n)^2} = -\frac{1+x(n+1)}{x^2(1+x)^{n+1}}.$$

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $f'_n(x) < 0$. Par suite f_n est strictement décroissante. **0,5 pt**

Tableau de variation de f_n.

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0

0,5 pt

2) Montrons que f_n admet une bijection réciproque notée f_n^{-1}

Sur $]0; +\infty[$ f_n est dérivable (continue) et strictement décroissante donc elle est bijective de $]0; +\infty[$ vers $f_n(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$. Par conséquent f_n admet une bijection réciproque f_n^{-1} définie sur J$=]0; +\infty[$. **0,75pt**

3) Etudions, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la position de C_{n+1} par rapport à C_n.

Cherchons le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

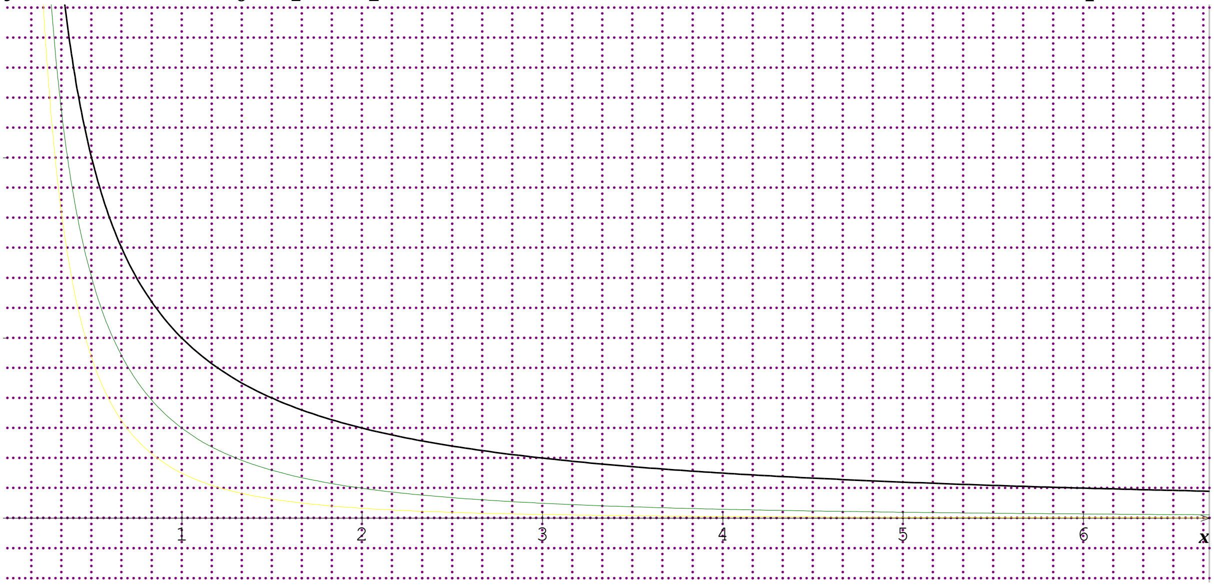
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x(1+x)^{n+1}} - \frac{1}{x(1+x)^n} = \frac{1}{x(1+x)^n}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x(1+x)^n}\left(\frac{-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$.

$\forall\, x > 0$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ donc sur $]0; +\infty[$ C_{n+1} est en dessous C_n. **0,5 pt.**

4) Traçons les courbes C_0 , C_1 et C_2. **0,25 + 0,5 + 0,5 = 1,25 pt**



Partie B

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$.

1) a) Montrons que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$

$\forall\, x > 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{x(1+x)} = \frac{1}{x(1+x)}$. **0,5 pt**

b) Calculons I_0 et I_1

$I_0 = \int_1^2 f_0(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [lnx]_1^2 = ln2$

$I_1 = \int_1^2 f_1(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x}dx = [lnx - \ln(1+x)]_1^2$

$I_1 = (ln2 - ln3) - (ln1 - ln2) = 2ln2 - ln3$ **0,5pt**

2) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left[(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{2})^n\right]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$

Donc, $I_{n+1} - I_n = \int_1^2 -\frac{1}{(1+x)^{n+1}}dx = \left[\frac{1}{n(1+x)^n}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{2})^n\right]$

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left[(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{2})^n\right]$. **1pt**

3) Calculons $\mathcal{A}$, l'aire en cm^2, du domaine plan délimité par les courbes C_1, C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Sur [1 ; 2], C_2 est en dessous de C_1. Donc, $f_2(x) - f_1(x) < 0$.

Par conséquent,

$$\mathcal{A} = \left(\int_1^2 f_1(x) - f_2(x)\,dx\right) \times 4\text{ cm}^2 = (I_1 - I_2) \times 4\text{ cm}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times 4\text{ cm}^2$$ **0,5 pt**

4) a) Montrons que : pour tout $n \geq 2$, $I_n = I_1 + S_n$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$

On sait que $\forall\, k \geq 1,\ \ I_{k+1} - I_k = \frac{1}{k}\left[(\frac{1}{3})^k - (\frac{1}{2})^k\right]$

Donc, $\forall\, n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} (I_{k+1} - I_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left[(\frac{1}{3})^k - (\frac{1}{2})^k\right]$.

Ainsi, $\forall\, n \geq 2,\ S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (I_{k+1} - I_k)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} I_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} I_k$

$= \sum_{k=2}^{n} I_k - \sum_{k=1}^{n-1} I_k$ (changement d'indice)

$= I_n - I_1$

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, $I_n = I_1 + S_n$. **0,5 pt**

b) Montrons que $\forall\, n \geq 1$; $0 \leq I_n \leq (\frac{1}{2})^n$.

$\forall\, x \in [1\,;2]$, on a : $1 \leq x \leq 2$ (1)

$2 \leq 1 + x \leq 3$

$2^n \leq (1+x)^n \leq 3^n$ (2)

En multipliant membre à membre (1) et (2), on obtient :

$$2^n \leq x(1+x)^n \leq 2 \times 3^n$$

Par conséquent, $0 \leq \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3})^n \leq \frac{1}{x(1+\ x)^n} \leq (\frac{1}{2})^n$,

Par suite, $0 \leq \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ x)^n}\,dx \leq \int_1^2 (\frac{1}{2})^n\,dx$.

D'où ; $0 \leq I_n \leq (\frac{1}{2})^n$. **0,5 pt**

c) Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

On a : $0 \leq I_n \leq (\frac{1}{2})^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - I_1) = ln3 - 2ln2 = ln\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = ln\frac{3}{4}$. **1 pt**

Partie C

On pose pour tout entier naturel n, $\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$.

1) Montrons que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^{n} f_k\,(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{f_n(x)}{x}$.

$$\sum_{k=0}^{n} f_k\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x(1+x)^k} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1\ +x)^k} = \frac{1}{x}\left[1 \times \frac{1-(\frac{1}{1+x})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x}}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}}{\frac{x}{x+1}}\right]$$

$$= \frac{1+x}{x^2}\left[1-\frac{1}{(1\ +x)^{n+1}}\right] = \frac{1}{x^2}\left[1+x-(\frac{1}{1\ +\ x})^n\right] = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{f_n(x)}{x}.$$

D'où, $\sum_{k=0}^{n} f_k\,(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{f_n(x)}{x}$. **0,75 pt**

2) Déduisons-en que : $\Gamma_n = ln2\sqrt{e} - \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx$.

$\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} I_k = \sum_{k=0}^{n} \int_1^2 f_k(x)\,dx \equiv \int_1^2 \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx$

$\Gamma_n = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx - \int_1^2 \frac{f_k(x)}{x}dx$

$\Gamma_n = [lnx]_1^2 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{f_k(x)}{x}dx = ln2 - \frac{1}{2} + 1 - \int_1^2 \frac{f_k(x)}{x}dx = \frac{1}{2} + ln2 - \int_1^2 \frac{f_k(x)}{x}dx$

D'où $\Gamma_n = \ln(2\sqrt{e}\,) - \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx$. **0,75 pt**

3) Justifions que : $0 \leq \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx \leq I_n$.

$\forall\, x \in [1\,;2] \quad 1 \leq x \leq 2,$

$0 \leq \frac{1}{x} \leq 1.$

$0 \leq \frac{f_n(x)}{x} \leq f_n(x)$

$0 \leq \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx \leq \int_1^2 f_n(x)$

D'où, $0 \leq \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx \leq I_n$. **1 pt**

4) Trouvons alors la limite de Γ_n

On sait que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx = 0$.

Comme $\Gamma_n = \ln(2\sqrt{e}\,) - \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx = 0$

Alors $\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n = ln2\sqrt{e}$. **0,5 pt**