Fiche 8 : Fonctions II. Limites

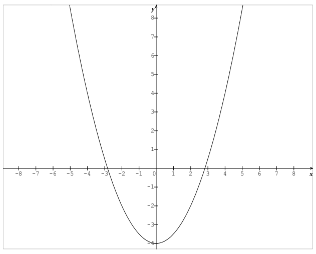
Dans la fiche 7 "Fonctions I", on a vu la définition d'une fonction et différentes notions afférentes.
En particulier, on a travaillé sur
• le domaine de définition d'une fonction ;
• la représentation graphique d'une fonction.
Dans cette fiche on va approfondir ces notions en se donnant des moyens calculatoires permettant de comprendre:
• ce qui se passe dans certains cas quand on se rapproche d'une borne du domaine de définition d'une fonction ;
• comment ajouter des droites remarquables à une courbe (représentant une fonction) permettant de donner des informations très intéressantes sur la courbe et sur la fonction.

1. Limites à l'infini.

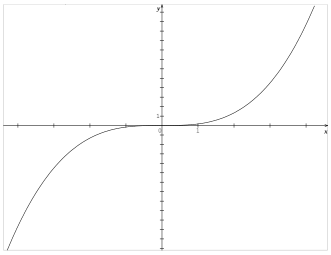
1.1 : Une première approche graphique.

Exercice 1 : lecture graphique
Chacune des fonctions représentées ci-dessous est définie sur R.

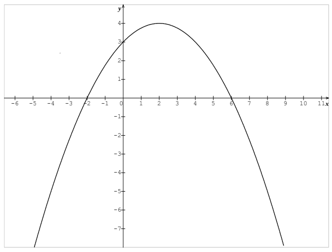
Dessin 1



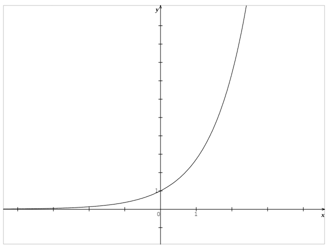
Dessin 2



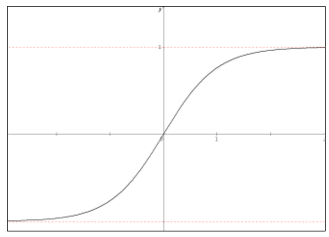
Dessin 3



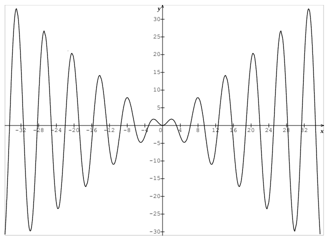
Dessin 4



Dessin 5



Dessin 6



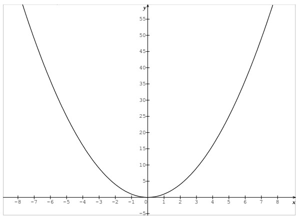
Prenons le dessin 1.
On remarque que y prend des valeurs de plus en plus grandes quand x devient grand (voir les conventions graphiques). On dit alors que y ou $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- Que peut-on dire sur $f(x)$ quand x tend $-\infty$?
- Dites vers quoi semble tendre y quand x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$ pour les dessins 2, 3, 4 et 5 .
- Pensez-vous que l'on puisse conclure de la même façon sur le dessin 6 ?

1.2 : Limite infinie à l'infini

a) Étude d'un exemple : la fonction carrée.

La fonction carrée est définie sur R par $f(x) = x^2$.
On s'intéresse au comportement de cette fonction pour les grandes valeurs de x.
Observons sa courbe représentative ainsi que les deux tableaux de valeurs donnés ci-dessous :



x	10	20	50	100	10^3	10^5	10^{10}
x^2	100	400	2500	10000	10^6	10^{10}	10^{20}

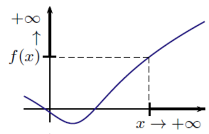
x	-10	-20	-50	-100	-10^3	-10^5	-10^{10}
x^2	100	400	2500	10000	10^6	10^{10}	10^{20}

On constate que plus x est grand et plus x^2 l'est aussi ...
Plus précisément on peut rendre x^2 aussi grand que l'on désire dès que x est suffisamment grand.
→ On dit alors que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
À l'aide du deuxième tableau ou en utilisant la parité de la fonction carrée, on peut dire de la même façon que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

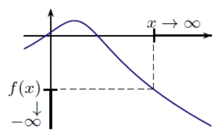
b) Limite infinie quand x tend vers $+\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E contenant au moins un intervalle de la forme $]A;+\infty[$.

Définition 1
Dire que "la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment grand
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



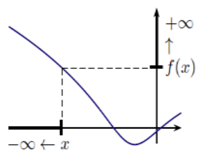
Définition 2
Dire que "la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ est négatif et devient aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que x est suffisamment grand
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



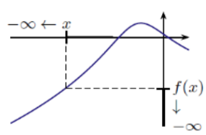
c) Limite infinie quand x tend vers $-\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E contenant au moins un intervalle de la forme $]-\infty,A[$.
On obtient des définitions du même type quand x tend vers $-\infty$.

Définition 3
Dire que "la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue.
On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



Définition 4
Dire que "la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient négatif et aussi grand en valeur absolue que l'on veut dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue.
On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



d) Limites des fonctions usuelles (à connaître):

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ (pour tout entier naturel $n > 0$).

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Remarque: certaines fonctions n'ont pas de limite à l'infini (voir dessin 6).

===

Exercice 2

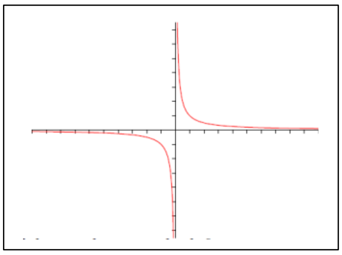
a) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
c) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^3$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
d) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^3$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

1.3 : Limite finie à l'infini.

a) Étude d'un exemple : la fonction inverse.

La fonction inverse est définie sur R* par $g(x) = \frac{1}{x}$.

On regarde le comportement de la fonction inverse pour les grandes valeurs de x *(en positif et en négatif)*.



x	5	10	50	100	1000
$\frac{1}{x}$	0,2	0,1	0,02	0,01	0,001

x	-5	-10	-50	-100	-1000
$\frac{1}{x}$	-0,2	-0,1	-0,02	-0,01	-0,001

Pour la fonction inverse, si x est grand alors $g(x) = \frac{1}{x}$ est proche de 0 ...

Plus précisément, on peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on désire pourvu que x soit suffisamment grand.

→ On dit alors que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

On peut retenir : plus le dénominateur d'un quotient est grand, plus le quotient est proche de 0.

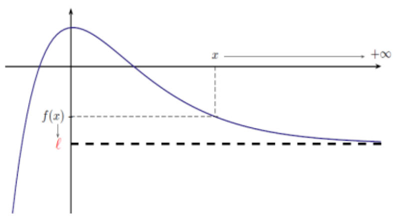
b) Limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E contenant au moins un intervalle de la forme $]A;+\infty[$.

Définition 5

Dire que "la fonction f a pour limite l en $+\infty$" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

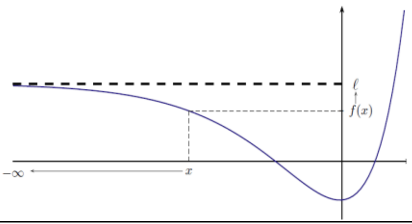


c) Limite finie quand x tend vers $-\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E contenant au moins un intervalle de la forme $]-\infty, A[$.

Définition 6
Dire que "la fonction f a pour limite l en $-\infty$" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de l dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue.

On note : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.



d) Interprétation graphique : asymptote horizontale.

Si "en $+\infty$" ou bien "en $-\infty$", f admet une limite finie l, alors la courbe devient « très proche » de la droite d'équation $y = l$

Définition 7:

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, la courbe représentative de la fonction admet la droite d'équation $y=l$ comme **asymptote horizontale**.

Remarque : très souvent, l'asymptote est tracée en pointillés, comme cela a été fait sur les deux précédents graphiques.

e) Limites des fonctions usuelles (à connaître):

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ (pour tout entier naturel n non nul).

Exercice 3

a) Soit f la fonction définie sur R* par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Soit f la fonction définie sur R* par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$ Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c) Soit f la fonction définie sur R* par : $f(x) = \frac{3}{x^4}$ Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Limites en un point.

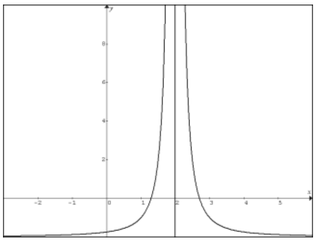
2.1 : Une première approche graphique.

Chacune des fonctions représentées ci-dessous est définie sur un ensemble E.
a est un réel qui est soit un réel de E, soit une borne ouverte de E.

Exercice 4 : lecture graphique

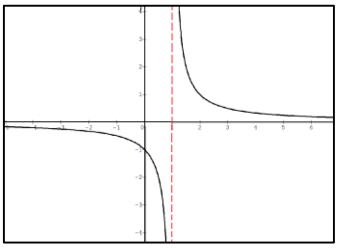
Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, dites vers quoi semble tendre $f(x)$ quand x tend vers la valeur a donnée (c'est-à-dire pour des valeurs de x proches de a) ; on sera amené parfois à séparer les cas : $x < a$ et $x > a$. Précisez la notation qui vous vient intuitivement.

Dessin 1



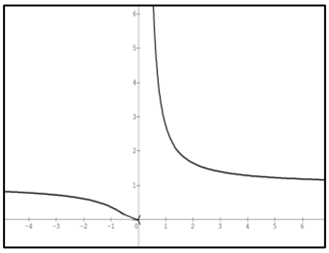
$a = 2$

Dessin 2



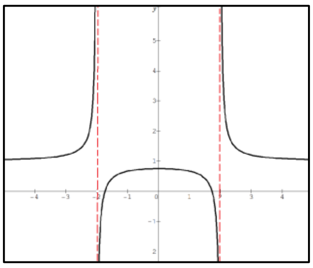
$a = 1$

Dessin 3



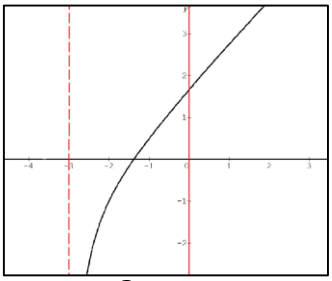
$a = 0$

Dessin 4



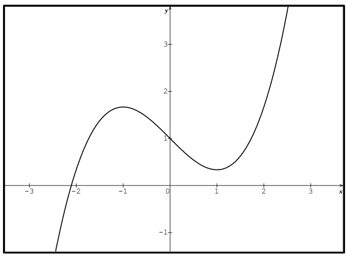
$a = -2$ et $a = 2$

Dessin 5



$a = -3$

Dessin 6



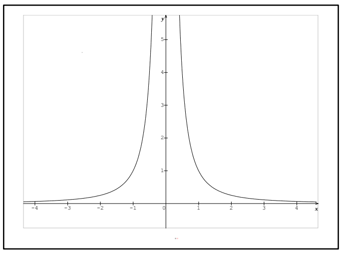
$a = 0$

2.2 : Limite infinie en un point.

a) Étude d'un exemple.

La fonction h est définie sur R* par $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

On regarde le comportement de cette fonction pour les valeurs de x proches de 0 *(en positif et en négatif)*.



x	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
$\dfrac{1}{x^2}$	4	100	400	10^4	10^6

x	-0,5	-0,1	-0,05	-0,01	-0,001
$\dfrac{1}{x^2}$	4	100	400	10^4	10^6

On constate que plus x est proche de 0, plus $\dfrac{1}{x^2}$ prend de grandes valeurs.

Plus précisément, on peut rendre $\dfrac{1}{x^2}$ aussi grand que l'on désire pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

→ On dit alors que $h(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

On peut retenir : plus le dénominateur d'un quotient est proche de 0, plus le quotient prend des valeurs grandes en valeur absolue.

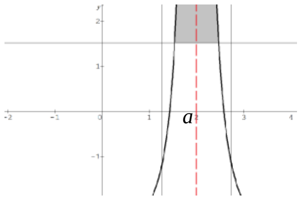
b) Limite infinie quand x tend vers a.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

a est soit un réel de E, soit une borne ouverte de E.

Définition 8
Dire que "la fonction f a pour limite $+\infty$ en a" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a.

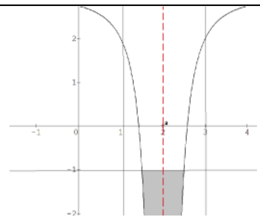
On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.



On définit de même

Définition 9
Dire que "la fonction f a pour limite $-\infty$ en a" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que x est suffisamment proche de a.

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.



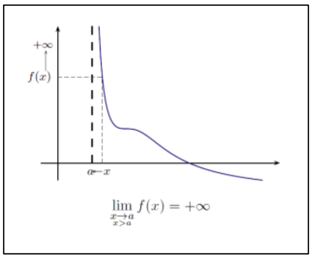
c) Limite à gauche; limite à droite.

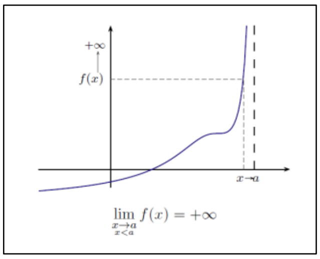
On est parfois amené à séparer les cas : $x < a$ et $x > a$ (voir la fonction inverse au voisinage de 0).

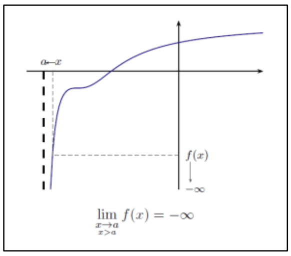
La fonction peut avoir en effet un comportement différent suivant que $x < a$ ou $x > a$.

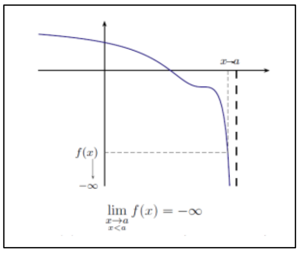
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (on parle alors de limite à gauche de a)

et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (on parle alors de limite à droite de a)









d) Interprétation graphique : asymptote verticale.

Si "en a^-" ou "en a+", f admet une limite infinie, alors la courbe devient « très proche » de la droite d'équation $x = a$.

Définition 10:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, la courbe représentative de la fonction admet la droite d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale**.

e) Limites des fonctions usuelles (à connaître):

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et...} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

n est pair: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

n est impair: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{...et...} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Exercice 5

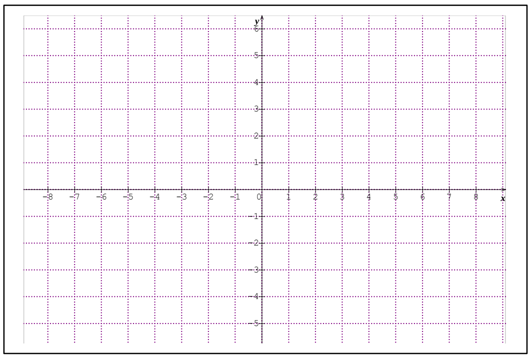
a) Soit f la fonction définie sur R* par : $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$. Déterminer la limite de f en 0.

b) Soit f la fonction définie sur R* par : $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ Déterminer la limite à gauche et la limite à droite de f en 0.

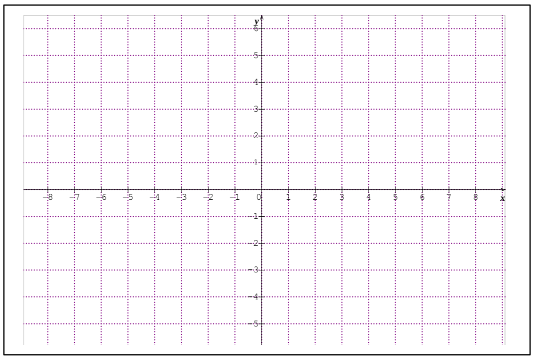
Exercice 6

Dans chacun des cas, on donne le tableau de variation d'une fonction *f*.
Tracer, à main levée, une courbe susceptible de représenter la fonction *f* dans le repère.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

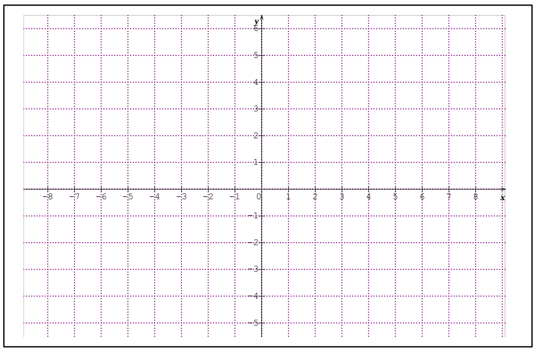


x	-3		1		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



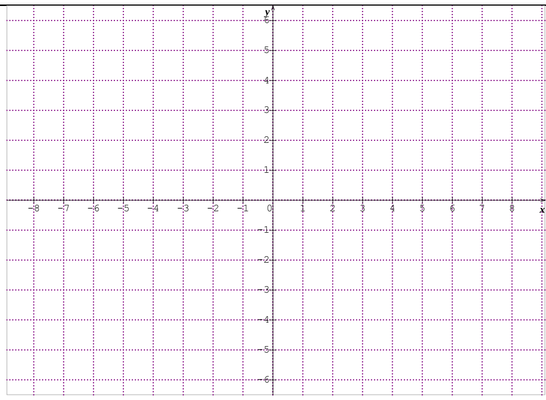
h est impaire

x	0		3		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+5$



k est paire

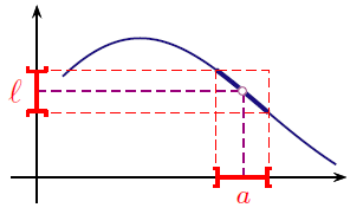
x	0		3		$+\infty$
k	$+2$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+5$



2.3 : Limite finie en un point.

Définition 11
Dire que "la fonction *f* a pour limite *l* en *a*" signifie *intuitivement* que le réel $f(x)$ devient aussi proche de *l* que l'on veut dès que *x* est suffisamment proche de *a*.

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.



Remarques :
• On est aussi amené parfois à séparer les cas : $x < a$ et $x > a$.

• Si une fonction *f* admet en un point *a* une limite à gauche et une limite à droite qui sont égales, alors *f* admet une limite en *a* et dans ce cas $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$

==
Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer la limite de f en 1.
2. Déterminer les limites à gauche et à droite de f en 0.
3. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

==

3. Limites et opérations

Dans ce paragraphe, *u* et *v* sont deux fonctions définies sur un même ensemble E.
ℓ et ℓ'sont deux réels. α représente soit un réel, soit +∞, soit -∞.

3.1 : Limite de la somme de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (u+v)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**forme indéterminée**

La dernière colonne est une ***forme indéterminée***, ce qui signifie qu'il faut effectuer des calculs ou transformations d'écriture avant de pouvoir conclure. Cela ne signifie surtout pas que la fonction n'a pas de limite.

3.2 : Limite du produit de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (u \times v)(x) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty^*$	**forme indéterminée**	$\pm\infty^*$

(*) On applique tout simplement la règle des signes.

On remarque qu'il y a aussi une *forme indéterminée*.

3.3 : Limite du quotient de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	$0^{\pm}$	$+\infty$ ou $-\infty$	ℓ'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\frac{u}{v}\right)(x) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty^*$	0	$\pm\infty^*$	forme indéterminée	forme indéterminée

(*) On applique tout simplement la règle des signes.

On remarque dans ce tableau deux nouvelles *formes indéterminées*.

4: Les formes indéterminées

Il existe donc, entre autres, 4 formes indéterminées, c'est à dire des formes où le résultat n'apparaît pas directement. Il convient dans ces cas-là de procéder à des transformations d'écriture permettant de lever l'indétermination ou permettant d'utiliser un résultat connu.

Nous allons étudier des exemples où on sait lever l'indétermination.

4.1 : Limites à l'infini de fonctions polynômes.

Les fonctions polynômes sont les fonctions de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \qquad \text{avec } a_n \text{ non nul.}$$

alors, on dit que : • n est le degré du polynôme P,
• $a_n x^n$ est le monôme de plus haut degré.

Par exemple, le polynôme $P(x) = -x^3 + 5x - 3$ est de degré 3 et son monôme de plus haut degré est $-x^3$.

Si on s'intéresse à la limite de P en $+\infty$, on se trouve très souvent face à une forme indéterminée [du type "$\infty-\infty$"].

Reprenons l'exemple précédent :
$P(x) = -x^3 + 5x - 3 = -x^3 + (5x - 3)$: or : $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-3) = +\infty$
On est donc en présence d'une forme indéterminée.

Factorisons le terme de plus haut degré : $P(x) = -x^3 + 5x - 3 = -x^3\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3} = 0$, donc , par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = 1$.

On en déduit, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^3\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$

On peut généraliser cette méthode et retenir que pour lever l'indétermination en $-\infty$ et en $+\infty$ dans le cas d'une fonction polynôme, on peut factoriser le monôme de plus haut degré.

Théorème 1
La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du monôme de plus haut degré.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} a_n x^n$$

4.2: Limites à l'infini de fonctions rationnelles.

Une fonction rationnelle (appelée aussi fraction rationnelle) Q est un quotient de deux polynômes :

$$Q(x)=\frac{a_n x^n+..........+a_1x+a_0}{b_m x^m+..........+b_1x+b_0} \qquad \text{avec } a_n \text{ et } b_m \text{ non nuls.}$$

Prenons l'exemple : $Q(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ or : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

On est donc en présence d'une forme indéterminée [du type "∞/∞"]..

Factorisons au numérateur et au dénominateur les monômes de plus haut degré :

$$Q(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2x}{x}\times\frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}=2\times\frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc , par somme et par quotient , $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=1$.

On en déduit, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

On peut généraliser cette méthode et retenir que pour déterminer la limite en -∞ et en +∞ d'une fonction rationnelle, on factorise au numérateur et au dénominateur le monôme de plus haut degré.

Théorème 2

La limite d'une fonction rationnelle en +∞ (respectivement en -∞) est égale à la limite en +∞ (respectivement en -∞) du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(\frac{a_n x^n+..........+a_1x+a_0}{b_m x^m+..........+b_1x+b_0}\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exercice 8

Calculer les limites des fonctions suivantes en +∞ et en −∞ en précisant les éventuelles asymptotes :

a) $f(x)=-2x^2+x-1$

b) $h(x)=\dfrac{4}{3}x^5-3x^4+\dfrac{7}{2}x^2-1$

c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$

d) $h(x)=\dfrac{3x^2-2x-2}{x^4+5x^2-1}$

e) $j(x)=\dfrac{-2x^3+3x^2-12x-1}{7x^2+3x+2}$

Exercice 9

Soient les fonctions *f* et *g* définies par

$$f(x)=\frac{-5x^5+3x+7}{x^2+4} \qquad g(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de *f* et de *g*.
2. Calculer les limites de *f* et *g* en +∞ et en −∞.
3. Calculer les limites de *f* et *g* en 1.

Exercice 10

La fonction *f* est définie sur R\{2} par: $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$

a) Déterminer les limites de *f* en -∞ et en +∞.
b) Préciser le signe de $f(x)$ en fonction de *x*.
c) Déterminer les limites suivantes: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

d) Montrer que la courbe représentative de *f* admet deux asymptotes.

Exercice 11

La fonction *f* est définie sur R\{2} par: $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$.

a) Déterminer les limites de *f* en -∞ et en +∞.
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2}(2x-5)$ et $\lim\limits_{x\to -2}(x-2)$. Préciser le signe de $(x-2)$ en fonction de *x*.

c) En déduire les limites suivantes: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)$.

d) Montrer que la courbe représentative de *f* admet deux asymptotes.

Exercice 12

Déterminer les limites à gauche et à droite de *a* de chacune des fonctions suivantes

a) $g(x)=\dfrac{x+7}{x^2-4}$ $\quad a=-2$ $\qquad$ b) $k(x)=\dfrac{x^2+7x-1}{-2x^2+3x+2}$ $\quad a=2$

Exercice 13*

On considère la fonction *f* définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+4x-2}{x-2}$.

1. Déterminer trois nombres réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout nombre $x\in\ ]2,+\infty[$, on ait

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

2.a. Étudier la limite de *f* en +∞.
b. Étudier la limite en +∞ de $f(x)-(ax+b)$.
c. En déduire que la courbe représentative C de *f* admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation au voisinage de +∞ ; c'est à dire que la courbe C se rapproche au voisinage de +∞ d'une droite Δ qui n'est ni horizontale ni verticale
3. Étudier la position de C par rapport à Δ sur l'intervalle $]2,+\infty[$, c'est-à-dire : préciser lorsque C est au-dessus de Δ et le contraire. (On étudiera le signe de $f(x)-(ax+b)$).
4. Montrer que la courbe C admet une autre asymptote dont on donnera une équation.

---

5. Limites et comparaison

α est soit un réel, soit -∞, soit +∞.

Théorèmes de comparaison

Si, au voisinage de α, $f(x)\geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$
Si, au voisinage de α, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$

Théorème dit "théorème des gendarmes"

Si, au voisinage de α, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$.

Exercice 14

La fonction f est définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$.

1) Montrer que, pour tout réel x de I, on a: $f(x) \geq x$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

---

6. Continuité

Exercice 15

On se donne la fonction f définie sur l'intervalle $[-3, 8]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Déterminer les images de -3, -2, 0, 2 et 6 par f.
2. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x \in [-3, 8]$.
3. Par lecture graphique, déterminer

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to6\\x<6}} f(x)$

(f) $\lim\limits_{\substack{x\to6\\x>6}} f(x)$

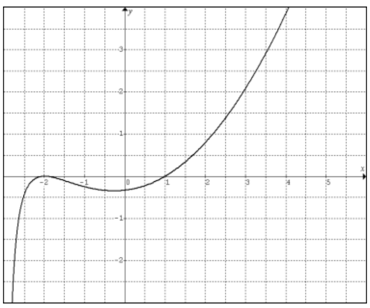
4*. Que peut-on dire de : $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x\to8\\x>8}} f(x)$?

===

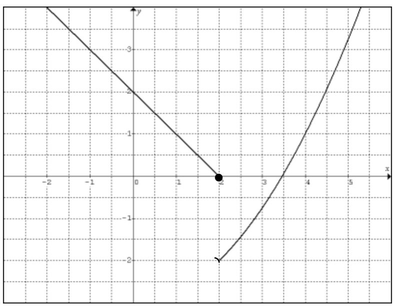
6.1. Continuité en un point

Dans tout ce paragraphe, on travaille sur un intervalle quelconque qui contient au moins deux éléments distincts, cet intervalle sera noté I.

Définition 12
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$



f est continue en 2



f n'est pas continue en 2.

On retiendra :

• Si le réel a n'est pas une borne ouverte de l'intervalle I, f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$$

• Si I est un intervalle fermé du type $[a,b]$,

- dire que f est continue en a revient à dire que f est continue à droite de a : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$
- dire que f est continue en b revient à dire que f est continue à gauche de b : $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = f(b)$

6.2. Continuité sur un intervalle.

Définition
f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout réel x de I.

Remarques :

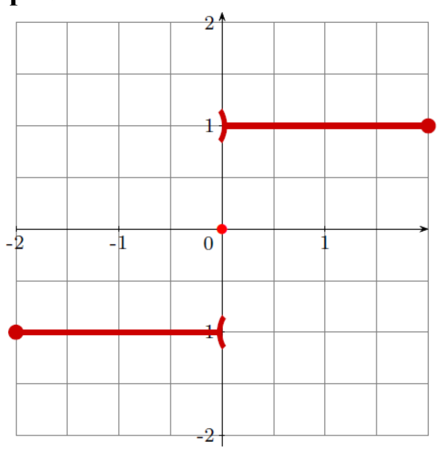
• Dans un tableau de variation, une flèche sous-entend la continuité de la fonction.

• En cas de discontinuité en un point, la flèche sera interrompue, même si le sens de variation de la fonction ne change pas.

Approche intuitive

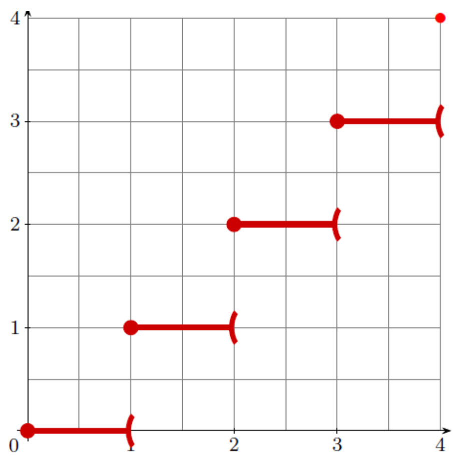
La courbe représentative d'une fonction f continue sur I peut être tracée sans lever le crayon, d'un trait continu sur I.

Exemples



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-2,0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0,2] \end{cases}$$

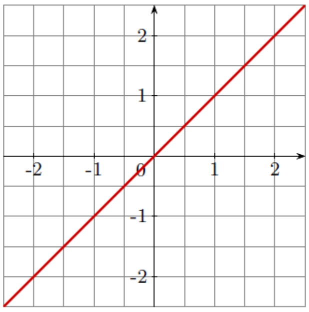
La fonction est discontinue en x = 0.
(on observe graphiquement un saut en x = 0).



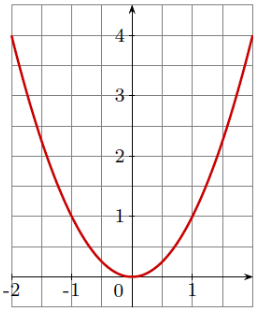
*La fonction **partie entière** est définie sur R par : f (x) = E(x)*
où E(x) est l'entier immédiatement inférieur ou égal à x.
Cette fonction est discontinue en toute valeur entière.
(on observe graphiquement un saut pour chaque valeur entière de x.)

On retiendra :

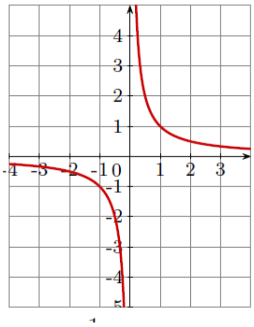
Les fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition :



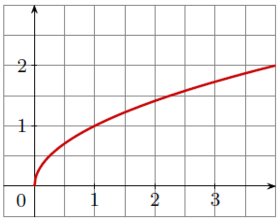
La fonction identité est continue sur R.



La fonction carrée est est continue sur R.



La fonction inverse est est continue sur]-∞,0[et sur]0 ;+∞[.



La fonction racine carrée est continue sur [0 ;+∞[.

Remarques.

• Le fait que les fonctions usuelles soient continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition permet de justifier les calculs du type :

$$\lim_{x\to 1}(x^2-5)=f(1)=-4 \qquad \text{ou bien} \qquad \lim_{x\to 57}\left(x-\frac{1}{x}\right)=f(57)=57-\frac{1}{57}=\frac{3248}{57}$$

• Par contre cela ne dit rien pour des limites aux bornes du domaine de définition.

===

Exercice 16

1. Soit

$$f:\ [0,2]\ \to\ \mathbb{R}$$
$$x\ \mapsto\ \begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\\ 2 & \text{si } x\in]1,2]\end{cases}.$$

a. Dans le graphique ci-contre tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur l'intervalle [0,2].

b. *La continuité par le graphique.*
En observant la représentation graphique de la fonction *f*, selon vous, *f* est-elle continue ?

c. *La continuité par le calcul.*
Calculer $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

La fonction *f* est-elle continue sur [0, 2] ?

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur R par $\begin{cases} f(x)=a & si\ x<0\\ f(x)=x-3 & si\ x\geq 0\end{cases}$ $(a\in\mathrm{R})$

Déterminer la valeur de a afin que *f* soit continue sur R.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur R par $\begin{cases} f(x)=2-5x & si\ x\leq\dfrac{2}{5}\\ f(x)=\sqrt{5x-2} & si\ x>\dfrac{2}{5}\end{cases}$

Démontrer que *f* est continue sur R.

===

7. Le théorème des valeurs intermédiaires

On travaille dans ce paragraphe dans un intervalle fermé et borné : I = $[a, b]$ où $a, b \in$ R et $a < b$.
On se donne une fonction f définie et continue sur $[a, b]$.

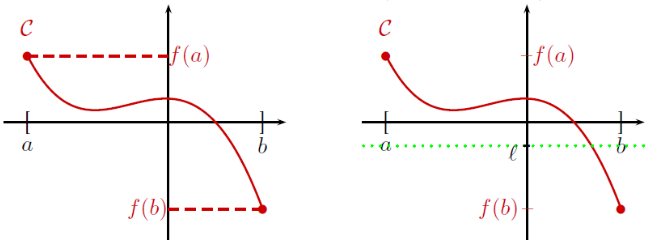
Définition.
On dit que $k \in$ R est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ lorsque
$f(a) \leq k \leq f(b)$ (si $f(a) \leq f(b)$) ou bien $f(a) \geq k \geq f(b)$ (si $f(a) > f(b)$).

Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (abrégé par TVI et énoncé ci-dessous) exprime un fait presque évident :
• on fixe une valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$
• Le but du TVI est de prouver l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ où l'inconnue est x et x parcourt l'intervalle $[a, b]$.

1) On trace la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f

2) On place ℓ sur les ordonnées
On trace la droite $y = \ell$
(ici en pointillés)

3) Le théorème dit :
il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que
le point (x_0, ℓ) soit sur la courbe



Plus précisément, le théorème peut s'énoncer de la manière suivante :

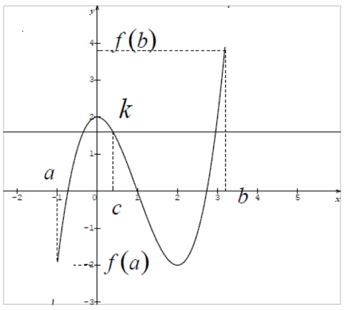
Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ;b\ ]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe

au moins un réel c compris entre a et b tel que

$f(c) = k$.



Remarques.
• Ce théorème peut se reformuler de la manière suivante :
Toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes au moins une fois par f.

• Le TVI ne donne ***aucune information sur le nombre de solutions*** outre le fait que l'on sait qu'il en existe au moins une.
Par contre, si on sait que la fonction f est strictement monotone (strictement croissante ou bien strictement décroissante) alors, il est clair que l'équation $f(x) = k$ possède au plus une solution. Ainsi si x_0 est une solution, alors x_0 est unique.

On a alors le théorème suivant :

Théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones.

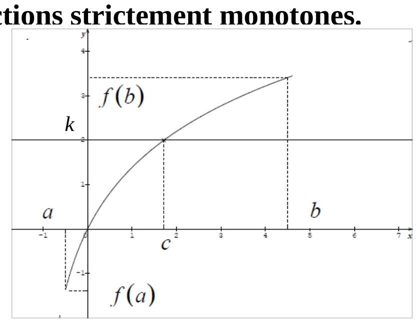
Si f est une fonction continue et strictement

monotone sur l'intervalle $[a,b]$, alors pour

tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution**

c appartenant à l'intervalle $[a,b]$



• Extension du théorème.

Ce théorème peut être étendu à tout intervalle ouvert (borné ou non borné) de R.

• Une variante très utilisée du TVI:
Si *f* est continue sur l'intervalle [*a* ,*b*] et si *f* (*a*) et *f* (*b*) sont de signes contraires [donc la valeur 0 est comprise entre *f* (*a*) et *f* (*b*)], alors il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

• Localisation des solutions
Le TVI permet se situer la solution sur l'intervalle [*a*,*b*].
Cette localisation de la solution peut manquer de précision.
Généralement, si on désire une valeur approchée de cette solution, on va chercher à diminuer l'amplitude de l'intervalle. On procède par exemple par balayage décimal successif (méthode pratique sur une calculatrice) ou par dichotomie.
La dichotomie consiste à localiser x_0 sur l'un des deux intervalles : [*a*,*c*] ou [*c*,*b*] où *c* est le milieu de l'intervalle [*a*,*b*] en réitérant l'utilisation du TVI. On peut renouveler cette méthode plusieurs fois pour obtenir une valeur approchée de plus en plus précise de la solution.

==

Exercice 18

Soit *f* la fonction définie sur R par : $f(x) = x^3 + 5x - 1$.
1. Justifier que *f* est continue sur R.
2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
3. En utilisant le TVI montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 19

La fonction *h* est définie sur $[0,+\infty[$.
Son tableau de variation est donné ci-contre.
Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions sur $[0,+\infty[$.

x	0		4		$+\infty$
h	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$