Classes de 1°S

Exercices Fonctions

1. Généralités

1-1 : Un peu de cours

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (ROC)

Partie A : Cours

1. Démontrer que si f et g sont deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle I .alors la fonction $f+g$ est strictement décroissante sur I .

2. Soit λ un réel strictement positif et f une fonction strictement décroissante sur I. Montrer que la fonction λf a le même sens de variation que f .

3. Soit f une fonction strictement décroissante sur I et qui prend ses valeurs $f(x)$ dans J et g une fonction strictement croissante sur J . Montrer que la fonction $g\circ f$ est strictement décroissante sur I .

4. On suppose, **dans cette question**, que f est **impaire**.

Démontrer que si f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Partie B : Applications :

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin 2x$.

3. a. Montrer que g est $\pi-$périodique. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction g ?

b. Étudier la parité de g. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction g ?

c. Montrer que g est la composée de deux fonctions de référence que l'on précisera.

d. Déterminer le sens de variation g sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

e. Dresser son tableau de variation sur une période.

f. Donner une ébauche de la représentation de g sur une période.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=x^2-4$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.

2. Exprimer $g\circ f(x)$ en fonction de x pour tout réel x de $D_{g\circ f}$.

1-2 : Trucs de base

1. Montrer que la droite $x = -2$ est axe de symétrie de la fonction $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x-10}$. Préciser l'ensemble de définition de *f*.

2. Mêmes questions avec $f(x)=\frac{-2x^2+7x-5}{2x-1}$ et le centre de syméri e $S\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

3. Quelle est la période de $f(x)=\cos(2x)\sin(3x)$?

4. Déterminer l'ensemble de définition et la parité de $f(x)=\sqrt{|x+1|+|x-1|}$.

5. Même question avec $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2.(1-x^2)}}$

6. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=4x^5-6x^3+2x-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ c. $h(x)=\frac{-2x+1}{4x^2}$

d. $k(x)=3x^2-2x+\frac{1}{1-x^2}$ e. $f(x)=\frac{x^2}{3-2x^2}$ f. $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$

g. $h(x)=\frac{(-2x^2+x)^2}{4x^4}$ h. $k(x)=\frac{2}{3\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

7. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes et préciser leur sens de variation :

a. $f(x)=4x^5-6x^3+2x-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ c. $h(x)=\frac{-2x+1}{4x^2}$

d. $k(x)=3x-2+\frac{1}{1-x^2}$

8. Déterminer l'ensemble D de définition, calculer la fonction dérivée, déterminer le signe de la fonction dérivée et dresser le tableau de variations de chacune des fonctions :

a. $f(x)=-2x^2+\sqrt{2}x+\dfrac{3}{5}$ b. $f(x)=\dfrac{-3x^4+4x^3+3}{2}$ c. $f(x)=\dfrac{1-2x}{3x-4}$

d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{8-2x^2}$ e. $f(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{3x-1}$ f. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ g. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$

9. Rappeler les formules de dérivation de $u.v$, $\sqrt{u}$, $\dfrac{1}{u}$.

10. Quelle est l'équation de la tangente à une courbe ($y = f(x)$) en un point d'abscisse a ?

11. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3-x^2+\dfrac{5}{2}x+3$. Vous ferez le tracé de la courbe C_f représentant la fonction f sur l'intervalle $[-7\,;3]$. Unités graphiques : 2 cm sur l'axe (Ox), 1 cm sur l'axe (Oy).

12. Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $g(x)=x+\dfrac{2}{2x-1}$.

13. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en donnant (sans justifier) l'ensemble de dérivabilité :

$a(x)=\dfrac{3}{5}x^5-\dfrac{7}{2}x^4+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x-7$ $b(x)=(4-3x)^7$ $c(x)=\dfrac{4}{7x}-\dfrac{5x^2}{2}$

$d(x)=\dfrac{-2x^2-x+3}{3x-4}$ $e(x)=\sqrt{2x-x^2}$

$f(x)=(1+\sin x)\cos x$ (on donnera f' en fonction de $\sin x$).

1-3 : Composée de fonctions

On considère les fonctions u et v définies par $u(x)=-x+4$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$. Soit f la fonction composée $v\circ u$ définie sur $]-\infty\;;4[$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. a. Quelle est l'image par u de l'intervalle $]-\infty\;;4[$?

b. Déterminer alors (sans calculer f') le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty\;;4[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]-\infty\;;4[$ par $g(x)=-f(x)+5$.

a. Déterminer les variations de la fonction g sur $]-\infty\;;4[$.

b. Exprimer $g(x)$ en fonction de x puis écrire $g(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

1-4 : Période

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+7x-1}{x+3}$ et C sa représentation graphique.

Montrer que le point Ω de coordonnées $(-3\,;-5)$ est un centre de symétrie de C.

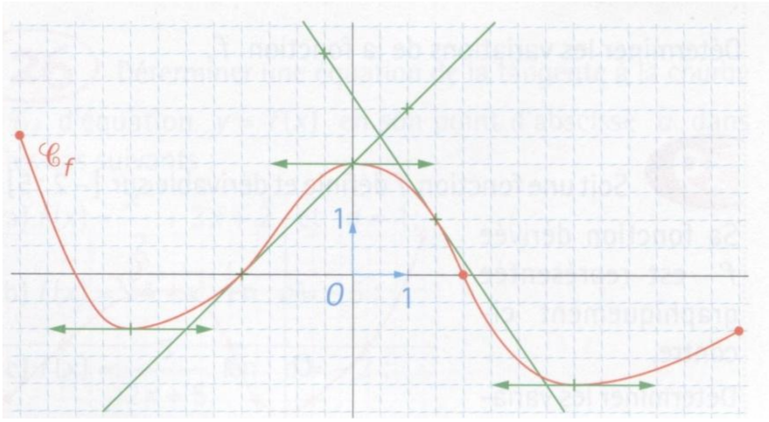
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x+1)=\dfrac{-g(x)}{1+g(x)}$. De plus, on suppose que pour tout réel x, $g(x)\neq -1$

a. Montrer que la fonction g est périodique et de période 2.

b. Sachant que $g(0)=1$, calculer $g(2006)$ et $g(2007)$.

1-5 : Représentation et tangentes 1

La courbe C_f est la représentation graphique de la fonction f dérivable sur l'intervalle $[-6\,;7]$. Les droites tracées sont tangentes à C_f.



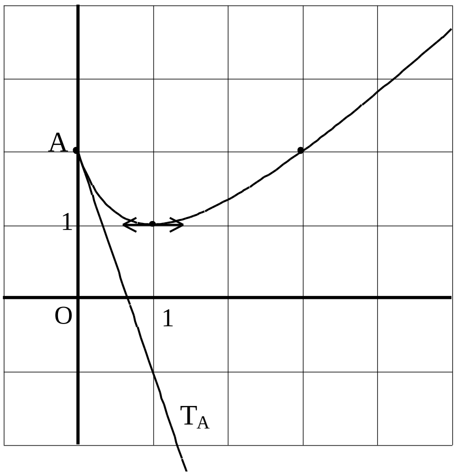
1. Donner les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(1{,}5)$.
2. Résoudre graphiquement les équations suivantes :
a. $f(x)=0$.
b. $f'(x)=0$.
3. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
a. $f(x)\leq 0$;
b. $f'(x)\leq 0$.

1-6 : Représentation et tangentes 2

La courbe ci-dessous représente une fonction *f* définie et dérivable sur [0 ; +∞ [dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On note *f'* la fonction dérivée de *f*.

La droite T_A est tangente à la courbe de *f* au point A d'abscisse 0.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.



1. A partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

2. Donner l'équation de la tangente au point A et de la tangente au point d'abscisse 1.

1-7 : Représentation et tangentes 3

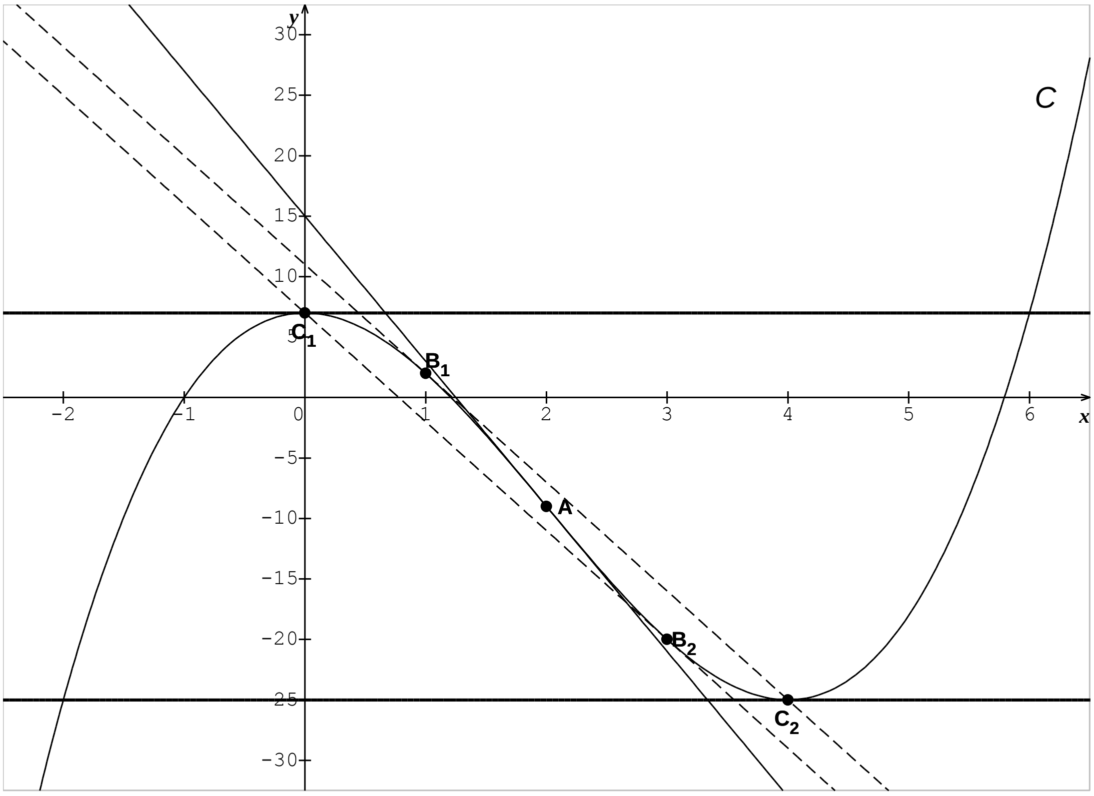
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ et C_h sa courbe représentative.

Déterminer les abscisses des points de C_h où la tangente :

1. admet -8 pour coefficient directeur.

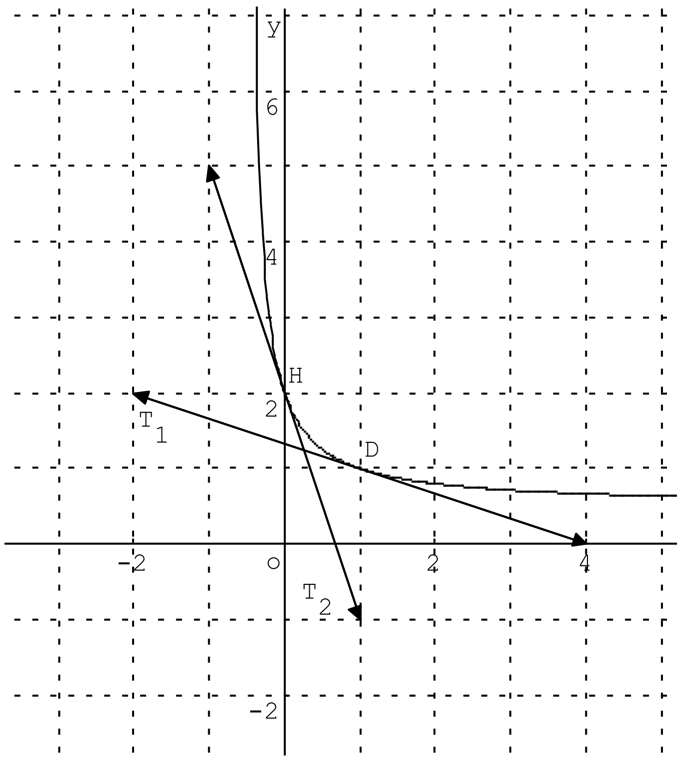
2. est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 3$.

3. est parallèle à l'axe des abscisses.



1-8 : Représentation et tangentes 4

La courbe C ci-dessous donne la représentation graphique de f dans un repère orthonormé, avec les tangentes en D et H représentées par une flèche double.



1. Lire sur le graphique $f(1)$ et $f'(1)$.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à C au point d'abscisse 1.

3. On suppose que la tangente au point H à la courbe C a pour équation $y=-3x+2$. Déterminer une valeur approchée du nombre $f(-0{,}1)$.4. Sachant que $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$, calculer $f(-0{,}1)$. Donner la valeur exacte de l'erreur commise.

1-9 : Tableau de variations

On suppose que la fonction g est dérivable sur $[-10\,;10]$ et admet le tableau de variations suivant :

x	-10		-1		5		10
$g(x)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-7

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Entourer la bonne réponse sans justifier.

1. $g(0)<g(4)$	V	F
2. $g(-1)<g(10)$	V	F
3. $g(-9)>g(-2)$	V	F
4. L'équation $g(x)=1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-10\,;10]$	V	F
5. $g'(x)>0$ sur $]-1\,;5[$	V	F
6. $g'(x)<0$ sur $[5\,;10]$	V	F
7. La dérivée g' peut s'annuler en -10	V	F

8. C_g admet au moins deux tangentes horizontales	V	F

1-10 : Parabole

Soit les points A (1 ; –4), B(–2 ; 2) et C(–3 ; 8). Déterminer les réels a, b et c pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par ces trois points.

1-11 : Equation (c)

Montrez à l'aide de votre calculatrice que l'équation $\frac{2x-1}{x^3}=1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Toute explication valable sera acceptée même si la rédaction est moche.

1-12 : Tangente (c)

Déterminer la tangente à la courbe (C) d'équation $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ au point A(–1, 0).

Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

Toute explication valable sera acceptée même si la rédaction est vilaine.

1-13 : Chercher une aire

Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

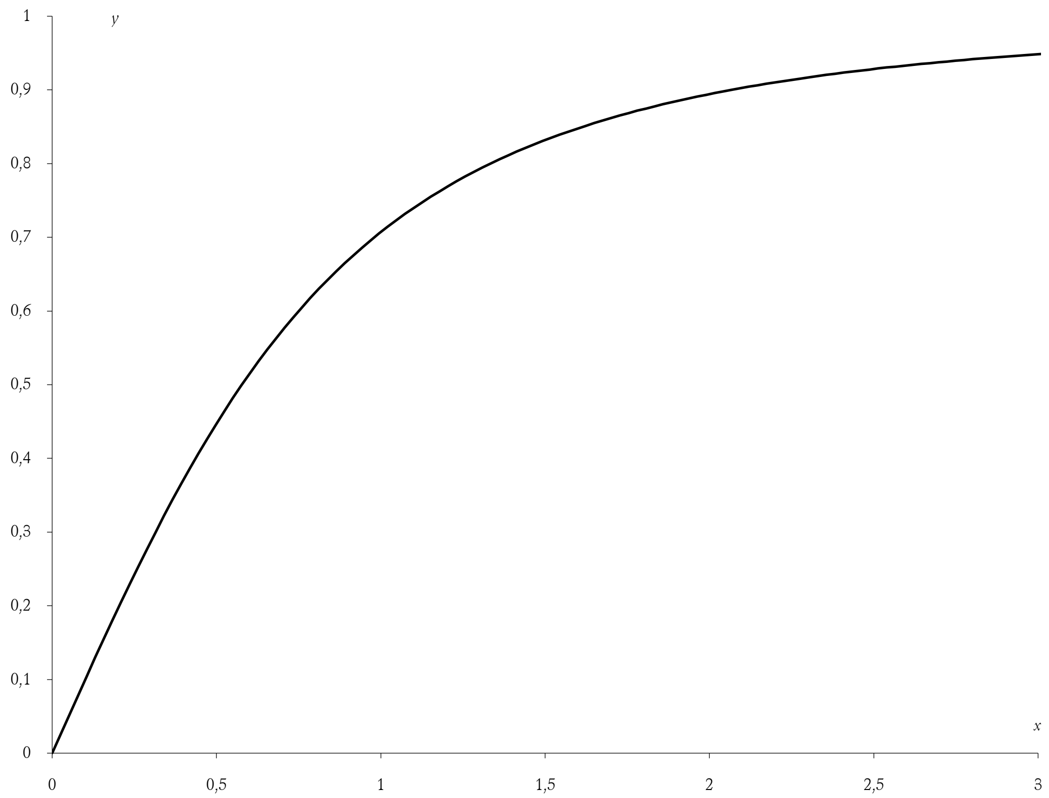
> H est une primitive de h sur un intervalle I si et seulement si H est dérivable sur I et si pour tout x de I on a $H'(x) = h(x)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $[0\,;+\infty[$.

2. Montrer que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est représentée ci-dessous.



Pour $\alpha \geq 0$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x=\alpha$.

3. Soit x_0 un réel strictement positif.

a. Soit h un réel strictement positif. En utilisant des rectangle convenablement choisis, établir l'encadrement

$$\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \leq \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq \frac{(x_0+h)}{\sqrt{1+(x_0+h)^2}}.$$

b. Quel encadrement peut-on obtenir de la même manière pour $-x_0 \leq h < 0$?

c. **Démontrer** que la fonction A est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de A en x_0 ?

4. Quel lien a-t-on établi entre les fonctions A et f sur $]0\,;+\infty[$?

1-14 : Dérivabilité

Soit la fonction f définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x+1}$. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.

b. A l'aide des formules de dérivation, vérifier que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>-1$. Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

1-15 : Approximation affine

f est la fonction $x \to \frac{1}{x^2}$. Montrer que l'approximation affine locale de $\frac{1}{(2+h)^2}$ au voisinage de 0 est égale à $\frac{1-h}{4}$.

b. En déduire des approximations des nombres suivants : $\frac{1}{(1,997)^2}$ et $\frac{1}{(2,001)^2}$.

1-16 : Fonction inconnue

Soit f la fonction trinôme telle que $f(x)=ax^2+bx+c$. Déterminer les réels a, b, c tels que sa courbe C_f admette au point $A(-2\,;-5)$ une tangente de coefficient directeur égal à -2 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1-17 : Etude sans limites

Etudier les variations de la fonction $f: x \to 2x^4-3x^3$ sur $\mathbb{R}$ (calcul de la dérivée, étude de son signe, variations de f). On donnera l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1.

1-18 : La méthode d'Euler

Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue (notée généralement y) et ses dérivées (y', y'', …).

On dira que l'équation est *linéaire* et du *premier ordre* si on peut l'écrire $y'+P(x)y=Q(x)$. L'équation est *sans second membre* si $Q(x) = 0$. Par la suite k, k', C désigneront des constantes, x la variable.

D'une manière générale si on a une équation différentielle (E) et que l'on nous donne une fonction f dont on demande si elle est solution, il suffit de calculer les dérivées nécessaires de f, de remplacer et de vérifier que f satisfait (E) (on arrive alors à une égalité du style 0 = 0).

Considérons une équation différentielle du type : $y'=F(x,y)$: la méthode d'Euler consiste à assimiler le nombre dérivé $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ d'une fonction en un point avec le nombre $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ où h est petit.

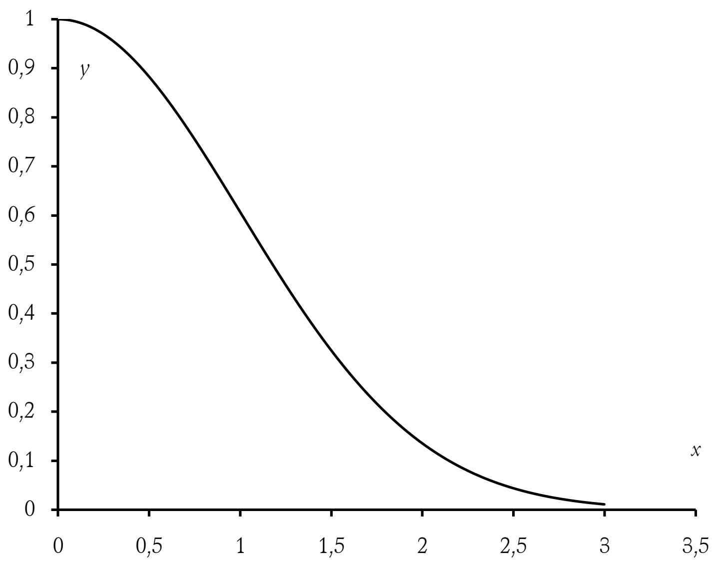
En attaquant avec un point $M_0(x_0, y_0)$ on définit alors une suite de points $M_n(x_n, y_n)$ tels que

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h \\ \dfrac{y_{n+1}-y_n}{h}=F(x_n,y_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1}=x_n+h \\ y_{n+1}=y_n+hF(x_n,y_n) \end{cases}.$$

La succession de ces points donne alors une solution approchée de l'équation différentielle $y'=F(x,y)$ sous forme d'une courbe intégrale.

Cette méthode est évidemment insuffisante dès que l'on souhaite une bonne précision, mais les calculs sont assez rapides ce qui permet de se faire une idée générale sur la question. Par la suite on raffine les calculs avec des méthodes plus performantes (Simpson, Runge-Kutta).

Par exemple ci-dessous on a tracé une solution de l'équation $y'=-xy$ avec $y(0)=1$ (telecharger le modèle sur http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/1S/modele_equadiff-euler.xls).



Une application importante…

1. On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle $y'=ky$ où k est un réel quelconque. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que $y(x+h)=(1+hk)y(x)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

2. On définit les suites (x_n) et (y_n) par $x_0=\alpha$, $y_0=\beta$, $x_{n+1}=x_n+h$ et $y_{n+1}=(1+hk)y_n+h\varepsilon(h)$. Donner l'expression de x_n en fonction de α, h et n. En considérant que $h\varepsilon(h)$ est négligeable donner une expression de y_n en fonction de β, h, k et n.

3. On prend $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

a. Construire une feuille de calcul permettant de calculer les valeurs successives de x_n et y_n. Tracer les représentations graphiques $C_n(x_n, y_n)$ obtenues dans les cas suivants avec un pas $h = 0{,}02$:

$$k = -2 \,;\, k = -0{,}5 \,;\, k = 0 \,;\, k = 0{,}5 \,;\, k = 1 \,;\, k = 2.$$

b. Toujours avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, justifier que quand $k > 0$ la fonction y est croissante, quand $k = 0$ la fonction y est constante et quand $k < 0$ la fonction y est décroissante.

c. En modifiant les valeurs de α et β dans la feuille de calcul déterminer les changements apportés par ces différentes valeurs aux courbes C_n.

1-19 : Quelques résolutions avec utilisation de la méthode d'Euler

1. $y'=ky+k'$

On considère l'équation différentielle : (A) $y'=-10y+6$ où y désigne une fonction de la variable t, dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. En utilisant la méthode d'Euler avec $y(0) = 0$ et un pas $h = 0{,}01$ tracer la courbe solution sur $[0 ; 5]$.

b. Trouver K constante réelle telle que $f(t) = K$ soit solution de(A).

c. On pose $y = u + K$; montrer que y est solution de (A) si et seulement si u est solution de (B) : $y' = -10y$.

d. Déterminer les solutions de (B), en déduire les solutions de (A).

e. En utilisant la même méthode qu'au III. 4. b montrer que les solutions trouvées sont les seules possibles.

f. Déterminer la solution de (A) telle que $f(0) = 0$.

Tracez cette solution sur la même figure qu'à la question IV. 1. a. Représentez également l'écart entre la solution obtenue avec Euler et la solution exacte. Interprétez.

2. On lache un objet d'une hauteur quelconque dont l'équation du mouvement est connue classiquement (chute des corps : $m\ddot{x}=mg$) ; si on tient compte de la résistance de l'air on doit faire intervenir un facteur proportionnel au carré de la vitesse (ce résultat est expérimental) : l'équation du mouvement est alors

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$$

où k est un paramètre dépendant du fluide concerné et de la géométrie de l'objet.

Appliquer la méthode d'Euler pour obtenir une représentation de v : on prendra $m = 10$, $k = 1$, $g = 10$, $v(0)=0$ puis $v(0)=5$ et on comparera ce qui se passe au nombre $K=\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Dans une deuxième colonne de votre tableau, réutilisez la méthode d'Euler pour obtenir $x(t)$ (on rappelle que $v(t)=x'(t)$).

Le lecteur intéressé pourra charger d'autres fichiers sur Promenades Mathématiques (ch. Equations différentielles) : http://promenadesmaths.free.fr/

2. Polynômes

2-20 : Second degré 1

P est la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Déterminer les réels a, b et c sachant que cette parabole passe par les points $A(-1\,;0)$, $B(0\,;\frac{7}{4})$ et $C(3\,;4)$.

2. Déterminer l'intersection de la parabole avec chacun des axes du repère.

3. Donner le tableau de variations de la fonction trouvée et construire la parabole P.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\le x+2$.

5. Construire la droite D d'équation $y=x+2$ dans le même repère que la parabole et vérifier graphiquement le résultat précédent.

2-21 : 3ème degré 1

On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;14]$. Sa représentation graphique est la courbe ci-dessous. La tangente au point A est la droite (D) = (AB).

1. a. Lire les valeurs de $f(4)$, $f(7)$ et $f(13)$.

b. Quels sont les réels x tels que $f(x) = 0$?

c. Donner l'ensemble des réels x tels que $0\le f(x)\le 4$.

2. a. Que valent $f'(4)$ et $f'(10)$? (Justifier)

b. Donner une équation de la droite (D). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

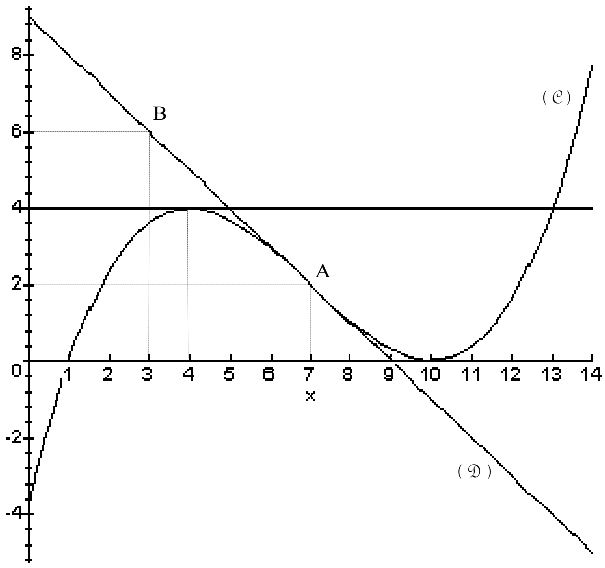
c. Dresser le tableau de variations de f sur I.

3. On sait que f est de la forme $f(x)=\frac{1}{27}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)$.

a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et b.

b. Utiliser la question 2.a. pour en déduire les valeurs de a et b.

Utiliser alors une des réponses du 1.a. ou 1.b. pour en déduire c. Donner alors l'expression de $f(x)$.



c. Déterminer graphiquement et par le calcul $f(0)$.

2-22 : 3ème degré 2

Soient les fonctions f et g définies sur **[0 ; 1]** par $\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x + 1 \\ g(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^3 + 1\right) \end{cases}$, H la courbe représentative de f et C celle de g, unités : 20 cm.

a. Etudier le sens de variation de f et montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution a dans l'intervalle [0 ; 0,5] . Tracer les tangentes à H en 0 et 1 puis construire H.

b. Etudier le sens de variation de g et construire avec précision sa courbe C ainsi que la droite D ($y = x$) sur la même figure que H

c. Que peut on dire de l'abscisse du point d'intersection de C et D ?

d. Donner une valeur approchée de a à 0,01 près (les calculs doivent apparaître…).

e. Existe-t-il un point de H et un point de G qui aient la même tangente ? Des tangentes parallèles ?

2-23 : 3ème degré 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ et C_f sa courbe représentative. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{27}{4}x + \dfrac{11}{2}$ et P la parabole qui la représente.

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$. Etudier les variations de f et g.

2. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

b. En factorisant $f(x)$ retrouver les résultats précédents.

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer le point d'intersection de C_f et P dont les coordonnées sont entières.

4. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente à la courbe P au point d'abscisse 3.

5. Déterminer, par le calcul, en quel(s) point(s) de C_f la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = \dfrac{7}{3}x$.

6. Calculer $f'(1,5)$ et $g'(1,5)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

7. Déterminer par le calcul en quelles valeurs de x, la tangente à C_f est parallèle à la tangente à P.

3. Fonctions rationnelles

3-24 : Hyperbole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-3}{-x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.

b. Etudier le signe de $f(x) - (x-2)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Existe-t-il des points en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$? Si oui, préciser leurs coordonnées.

3-25 : Rationnelle 1

Déterminer l'ensemble de définition, la dérivée, le signe de la dérivée et le tableau de variations de $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(1-x)^2}$.

3-26 : Rationnelle 2

Soit $f(x)=\dfrac{(1-x)^3}{x^2}$. C sa courbe représentative

a. Trouver a, b, c, d tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2}$ pour tout x réel non nul.

b. Etudier les variations de f : dérivée, signe de la dérivée, limites, tableau.

c. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

d. Peut-on trouver un point de C où la tangente à C soit parallèle à la droite Δ ($y=-x$) ? Si oui, préciser l'équation de cette tangente T'.

e. Montrer que C a une asymptote oblique D. préciser leurs positions respectives, tracer T' si elle existe, T, D et C.

f. Justifier l'existence d'une solution unique de l'équation $f(x) = 1$. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

3-27 : Rationnelle 3

Soit $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+7}{1-2x}$.

a. Déterminer son ensemble de définition, trouver a, b, c réels tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1-2x}$.

b. Montrer que le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C) de f.

c. Déterminer suivant les valeurs de x la position de (C) par rapport à la droite (D) $y=2x+3$

d. Tracer dans un repère orthonormé la droite (D) et la courbe (C). (on placera particulièrement les points A et B de (C) d'abcisses respectives $-1/2$ et $3/2$).

e. Déterminer graphiquement puis algébriquement le signe de f.

3-28 : Rationnelle 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\ ,\ 2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-4x-4}{x^2-4}$.

a. Trouver deux nombres a et b tels que $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2-4}$

b. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Montrer que la courbe (C) de f a une asymptote oblique (D) et préciser la position de (C) par rapport à (D).

3-29 : Rationnelle 5

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right) \text{ et } g(x)=2x^3+x^2-1$$

1. Montrer que pour tout $x\neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique a, avec $0<a<1$ (on ne cherchera pas à calculer a). Préciser le signe de g suivant les valeurs de x.

3. Dresser le tableau des variations de la fonction f . On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de (C) d'abcisse -1 et par J le point de (C) d'abcisse $+1$.

a. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à (C).

b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C) .

c. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (C) (on prendra 2/3 comme valeur approchée de a).

3-30 : Rationnelle 6

Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1. Etudier les variations de la fonction g, et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude de la fonction f.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$, $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que C admet une asymptote oblique D à l'infini. Etudier la position de C par rapport à D.

4. Déterminer les abscisses des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$

5. Tracer la droite D, les tangentes du 4. ainsi que la courbe C .

3-31 : Rationnelle 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout x réel, $f'(x)=\dfrac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}$.

2. Etudier les variations de la fonction f.

3. a. Montrer que pour x réel, $f(x)=x+1-\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Montrer que la courbe C_f admet une asymptote dont l'équation sera précisée. Etudier la position de C_f par rapport à cette asymptote.

3-32 : Rationnelle 8

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-4}{x+1}$. On appelle C_f sa représentation graphique.

1. Déterminer la limite de f en -1, puis en $+\infty$.

2. a. Montrer que la droite D d'équation $y=x-3$ est asymptote à la courbe C_f lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Préciser les autres éventuelles asymptotes à C_f.

3. Etudier la position relative de C_f par rapport à D sur $]-1\,;+\infty[$.

4. a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

b. Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation complet de *f* sur son intervalle de définition.

5. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3-33 : Rationnelle 9

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+2}$. On appelle C sa représentation graphique.

Déterminer la limite de *f* en $+\infty$, puis en $-\infty$ et préciser alors les éventuelles asymptotes.

3-34 : Rationnelle 10 : somme et différence d'inverses

On considère les deux fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;0\}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} \text{ et } g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$$

1. Etudier les limites de *f* et *g* aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives C_f et C_g ont les même asymptotes.

2. Etudier les variations des fonctions *f* et *g*.

3. Etudier la position de C_f par rapport à sa tangente en $\Omega(-1\,;0)$, et les positions relatives des courbes C_f et C_g.

4. Représenter C_f et C_g dans un même repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

5. Montrer que Ω est centre de symétrie de C_f et $(\Omega\,;\vec{j})$ axe de symétrie de C_g.

3-35 : Rationnelle 11 avec suite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4(2x+1)}{x^2+2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé : unité graphique : 1 cm.

1. a. Calculer $f'(x)$.

b. Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation de *f*.

2. Tracer C.

3. Soit D la droite d'équation $y=\dfrac{9}{4}x-7$ et T la tangente à C au point *A* d'abscisse 4.

a. Déterminer l'équation de T.

b. Montrer que le point *A* appartient à C et D.

c. Montrer alors que D et T sont perpendiculaires.

d. Tracer dans le repère précédent D et T.

4. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. La suite (u_n) est-elle monotone ?

3-36 : Rationnelle 12 : coeff. indéterminés

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x-2}$.

1. Sachant que -3 est un extremum de f atteint en 0, déterminer les réels a et b.

2. On suppose que $f(x)=\dfrac{6-3x}{x^2+x-2}$. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{3x^2-12x}{\left(x^2+x-2\right)^2}$ et en déduire son signe.

3. Dresser le tableau de variation de f en précisant la nature des extremums locaux.

3-37 : Rationnelle 13 : asymptote

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ par $h(x)=\dfrac{2x^3-x^2-5x+1}{x^2-2x}$.

1. Montrer que la droite D d'équation $y=2x+3$ est asymptote à C_h.

2. Étudier la position relative de C_h et de D en précisant les coordonnées du point d'intersection.

3-38 : Rationnelle 14 : avec fonction auxiliaire

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution que l'on note α dans $\mathbb{R}$.

b. Vérifier que $\alpha\in\left]1;2\right[$.

c. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

4. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$ par $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

1. Déterminer la limite de g en -1 et en $+\infty$.

2. Justifier que g est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ et vérifier que $g'(x)=\dfrac{f(x)}{\left(1+x^3\right)^2}$.

3. Dresser alors le tableau de variation de g.

3-39 : Rationnelle 15 : problème long

Sur la feuille annexe, on a représenté la courbe (C) de la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3}{x}-1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$. Préciser les équations des asymptotes à (C).

2. Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation complet.

3. Placer, sur la feuille annexe, les points A et B de C d'abscisses respectives 1 et 3, puis déterminer une équation de la droite (AB).

4. Soit M un point quelconque de (C) d'abscisse x. La parallèle à l'axe des ordonnées et passant par M coupe la droite (AB) en un point N. On note alors P le milieu de $[MN]$.

Déterminer les coordonnées de M et vérifier que $N(x;-x+3)$ et $P\left(x;\dfrac{3+2x-x^2}{2x}\right)$.

Partie B : Le but de cette partie est d'étudier l'ensemble Γ des points P lorsque le point M décrit la courbe (C).

On pose alors g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3+2x-x^2}{2x}$ et Γ sa représentation graphique.

1. a. Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

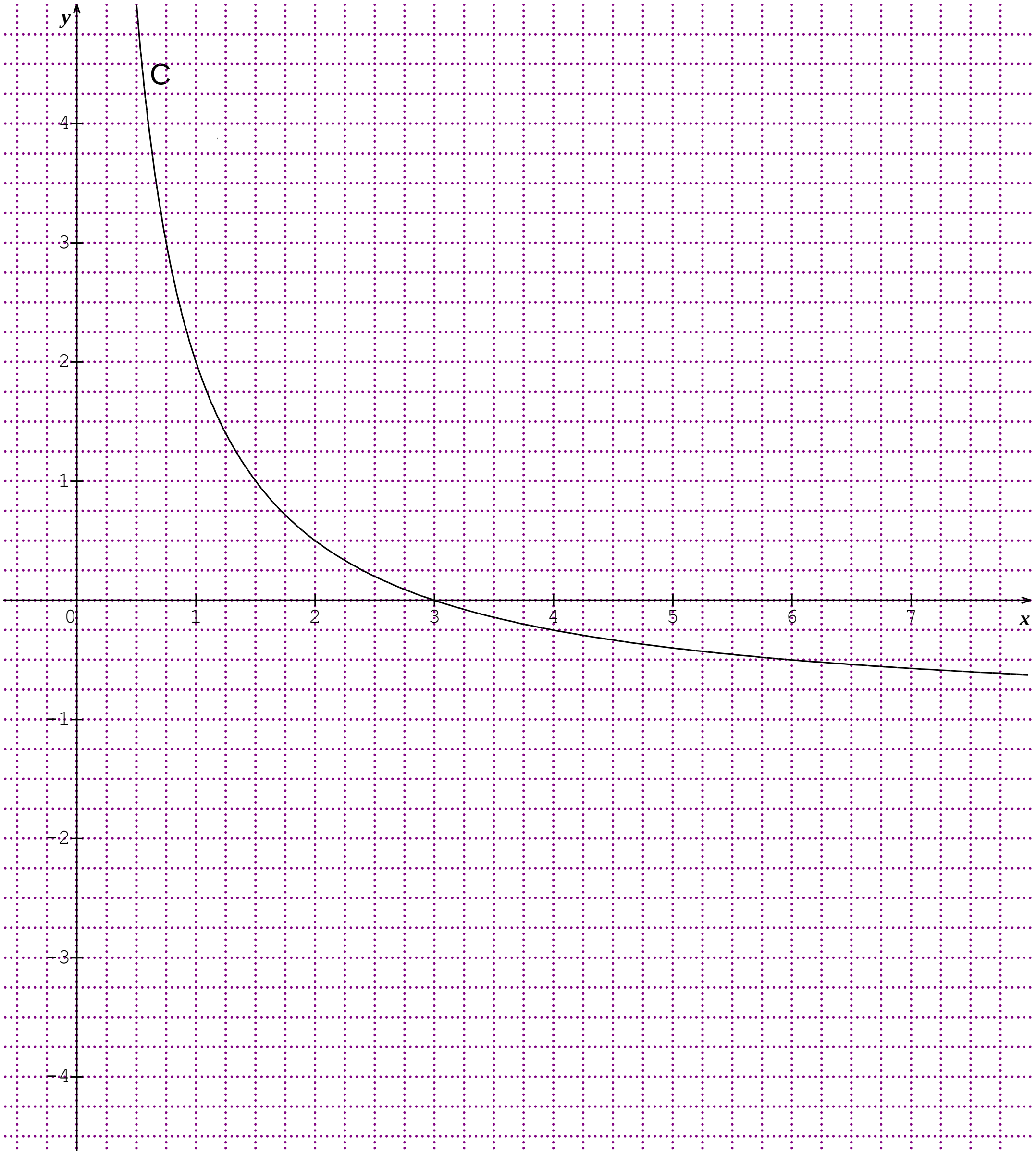
b. En déduire que Γ admet une asymptote dont on précisera une équation.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ est une asymptote à Γ.

2. Calculer $g'(x)$ puis établir le tableau de variation de g.

3. Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la courbe Γ.

4. Tracer Γ en vert et es asymptotes avec soin sur la feuille annexe.



3-40 : Révision (facile)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2+3x-1$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques. Soit D la droite d'équation $y=2x-3$.

Etude de f

1. a. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Etudier les limites de f en -1 (par valeurs inférieures, puis par valeurs supérieures).

c. Quelles sont les asymptotes de C_f et C_g ?

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de C_f où la tangente est parallèle à D.

4. Dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées), tracer sur l'intervalle $[-6 ; 4]$ la courbe C_f ainsi que ses asymptotes.

Etude de g

1. Etudier les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.

4. Déterminer l'équation de la tangente à C_g parallèle à la droite D.

Intersection

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.

2. Etudier suivant les valeurs de x, la position de C_f par rapport à C_g.

3-41 : Irrationnelle 1

Soit $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?

2. Montrez que la dérivée de f est $f'(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$.

3. Déterminez son sens de variation.

3-42 : Irrationnelle 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et que $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x<1$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Représenter graphiquement la fonction f.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty ; 0]$ et que $-\dfrac{1}{3}<x_1<0$.

b. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0 ; 1]$ et que $0<x_2<\dfrac{2}{3}<x_3<1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right|=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3-6u-1=0.$$

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i=\frac{3}{2}(x_i-\frac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i=\cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ pour tout θ réel.
(On rappelle que $\cos(a+b)$ = $\cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ et $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans [0 ; π] et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

4. Trigonométrie

4-43 : Cours

Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Déduisez-en la dérivée de la fonction sinus.

4-44 : Cosinus

f est la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(x)=1-\frac{1}{2}x+\cos x$. C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Etudiez les variations de f.
2. Déterminez une équation de la tangente T_1 à C au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente T_2 à C au point d'abscisse π.
3. Tracez les droites T_1 et T_2 ainsi que C.
4. Démontrez que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution x_0 dans $[0\,;\pi]$. Montrez que $1{,}7<x_0<1{,}8$. Déduisez-en le signe de f.

4-45 : trigo+courbe

a. Montrez que $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

b. Soit la fonction $f(x)=-4x^3+3x-\frac{1}{2}$.

Etudiez f sur $\mathbb{R}$ et tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 4 cm).

c. Calculez $f(-1)$ et $f(+1)$. Trouvez graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1\,;+1]$; donnez en une valeur approchée.

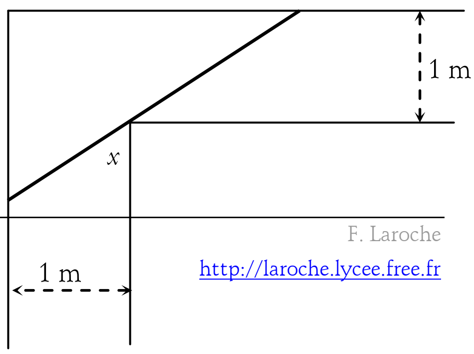
d. Déduisez de ce qui précède le nombre de solutions de l'équation $\sin 3a=\frac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$. Aurait-on pu utiliser une autre méthode ?

4-46 : trigo

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f(x)=x+\sin^2 x$ sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$.

4-47 : L'échelle dans le couloir

Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.



1. Résoudre sur cet intervalle l'inéquation $\sin x\geq\cos x$.
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a même signe que $\sin^3 x-\cos^3 x$.

b. Montrez que la fonction $g: x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de f'.

3. Dresser le tableau de variation de f et préciser ses limites en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

4. On veut déplacer une échelle dans un couloir de 1 m de large en lui faisant tourner un coin à angle droit. Quelle est la longueur maximale de l'échelle ? On pourra noter x l'angle entre l'échelle et le mur.

Que se passe-t-il (physiquement parlant) si l'échelle est plus longue que cette longueur maximale ?

Correction

1. On lit sur le cercle trigonométrique que $\sin x \geq \cos x$ lorsque $x \geq \frac{\pi}{4}$ (sur cet intervalle).

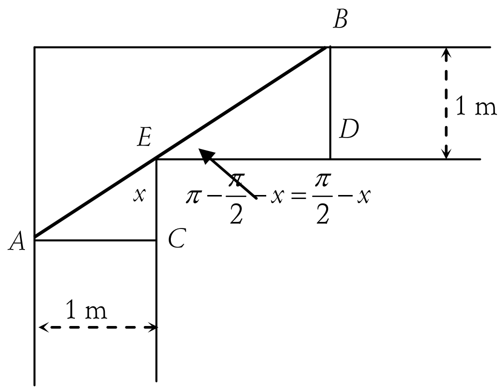
2. a. $f'(x) = \frac{-(\cos x)}{(\sin x)^2} + \frac{-(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{-(\cos x)^3 + (\sin x)^3}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{(\sin x \cos x)^2}$ qui a bien le même signe que $\sin^3 x - \cos^3 x$.

b. $g: x \to x^3$ a pour dérivée $3x^2$ qui est positive donc g est croissante. Lorsque $\sin x \geq \cos x$, on a donc $\sin^3 x \geq \cos^3 x$, par conséquent f' est positive lorsque $x \geq \frac{\pi}{4}$, négative sinon.

3. Lorsque x tend vers 0, cos x tend vers 1, sin x tend vers 0 en restant positif, donc $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \to \frac{1}{0^+} + 1 = +\infty$; de même lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ avec $x < \frac{\pi}{2}$, sin x tend vers 1 et cos x tend vers 0 en étant positif, f tend encore vers $+\infty$. $f(\pi/4) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a $\frac{AC}{AE} = \cos x \Rightarrow AE = \frac{1}{\cos x}$ et $\frac{BD}{BE} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \Rightarrow EB = \frac{1}{\sin x}$.



Donc et par conséquent $AB = AE + EB = f(x)$ … l'échelle a une longueur maximale de $2\sqrt{2}$, soit environ 2,8 m.

Si l'échelle est plus longue, on ne pourra passer qu'en tordant l'échelle ou en la sciant éventuellement, mais dans ce cas elle ne servira plus…quelle tristesse.

5. Optimisation et modélisation

5-48 : Boite 1

Une boîte parallélépipédique à base carrée, d'un volume de 64 dm^3 est construite dans un matériau qui revient à 3 centimes le cm^2 pour le fond et le couvercle et à 2 centimes le cm^2 pour la surface latérale.

Quelles doivent être les dimensions de cette boîte pour que son coût de revient soit minimum ?

5-49 : Boite 2

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle de dimensions y mm, x mm et $2x$ mm et de volume 576 mm^2.

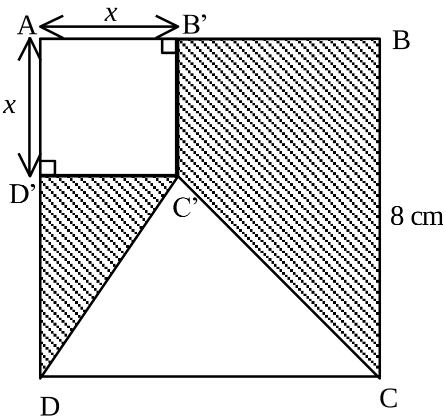
1. Faites un schéma et montrez que $y=\dfrac{576}{2x^2}=\dfrac{288}{x^2}$.

2. Calculez la surface totale S de ce parallélépipède rectangle en fonction de x.

3. x est compris entre 3 et 12 mm. Représentez la fonction S sur [3 ; 12] et déterminez entre quelles valeurs varie S. Quelle valeur de x rend elle S minimale ? Déterminez alors les dimensions de l'emballage.

5-50 : Aire dans un carré

Voici un carré ABCD. On donne AB = 8 cm et AB' = AD' = x avec $0 \le x \le 8$.



1. Montrer que l'aire $A(x)$ de la partie hachurée est donnée par l'expression $A(x)=-x^2+4x+32$.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire hachurée est égale à l'aire non hachurée.

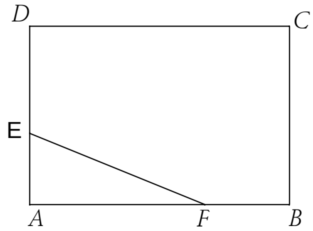
3. Déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire hachurée est inférieure ou égale à 20 cm^2.

4. a. Etudier les variations de la fonction A sur [0 ; 8].

b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire hachurée est maximale. Que vaut alors l'aire ?

5-51 : Plaque découpée

ABCD est une plaque rectangulaire de longueur AB = 30 cm et de largeur BC = 20 cm. On en coupe le coin A en enlevant le triangle AEF défini par $ED = AF = x$.

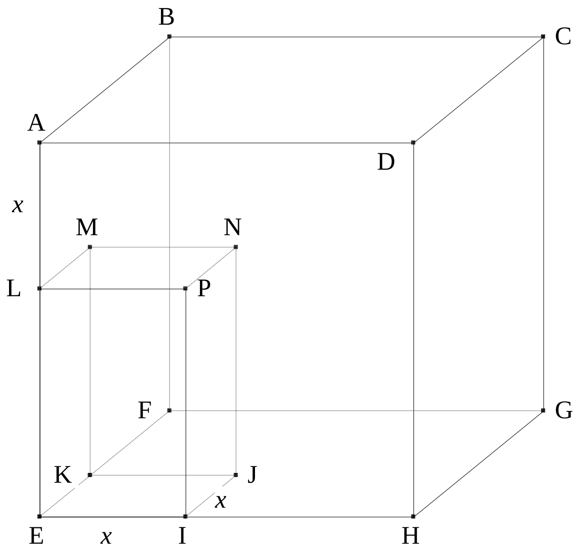


1. Exprimer l'aire $A(x)$ de la surface restante en fonction de x.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de x, la surface restante vaut-elle 550 cm^2 ?

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire $A(x)$ est-elle minimale ? Combien vaut cette aire minimale ?

5-52 : Le cube et le parallélépipède inscrit



On considère le cube ABCDEFGH d'arête 6 cm. On inscrit dans ce cube, le parallélépipède rectangle EIJKLPNM tel que EI = IJ = x et AL = x.

On veut déterminer la valeur x_m pour laquelle le parallélépipède rectangle est de volume maximum.

1. On désigne par V le volume du parallélépipède.

Montrer que V est donné par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 6] par $f(x) = -x^3 + 6x^2$.

2. Etudier les variations de la fonction f sur [0 ; 6].

3. Trouver alors la valeur x_m et le volume maximum correspondant.

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les valeurs de x pour lesquelles le parallélépipède a pour volume 0,025 litres.

5-53 : Clotûre

On dispose d'un mur long de 300 mètres et de 1000 mètres de clotûre, non installée. Quelles seront les dimensions du plus grand champ rectangulaire que l'on peut réaliser avec ces éléments ?

5-54 : Cône

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1,+1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

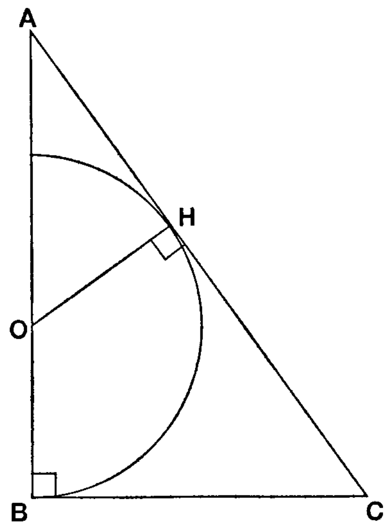
1. Trouver deux réels a et b tels que $f(x)=x^2+a+\dfrac{b}{x^2-1}$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

4. Soit P la courbe d'équation $(y=x^2+1)$. Quelles sont les positions relatives de C et P ? Que peut on dire de P ?

5. Tracer P et C dans le même repère.



6. Volume d'un cône : Dans la figure ci-contre, on considère un triangle ABC rectangle en B. Le demi-cercle de centre O a pour rayon 1 ; la droite (BC) est tangente en H au demi-cercle ; la droite (AC) est tangente en H au demi-cercle.

On pose : $AB = h$, $BC = x$ ($x>1$)

a. Prouver que $\dfrac{OH}{AH}=\dfrac{BC}{AB}$. En déduire les égalités : $h=x\sqrt{(h-1)^2}$, $x^2=\dfrac{h}{h-2}$, $h=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

b. Rappelons que le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon du cercle de base R est $V=\dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

c. En pivotant autour de (AB), le triangle ABC engendre un cône de révolution de sommet A. Exprimer le volume $V(x)$ du cône en fonction de x.

d. A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de x le volume est minimum. Calculer pour cette valeur de x l'angle BAC (à 0,1 degré près).

5-55 : Cône de révolution

Dans une sphère de centre O et de rayon R, on inscrit un cône de révolution de hauteur h.

1. Démontrer que le rayon r de la base du cône est tel que $r^2 = 2Rh - h^2$.

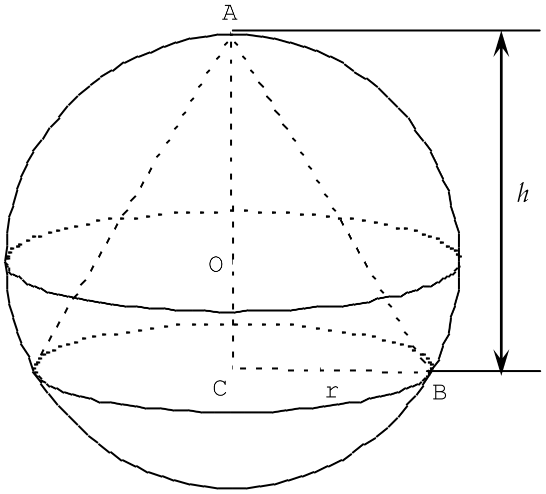
2. En déduire que le volume est donné par

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(2Rh^2 - h^3\right).$$

3. Justifier que V est défini sur $[0\,;2R]$.

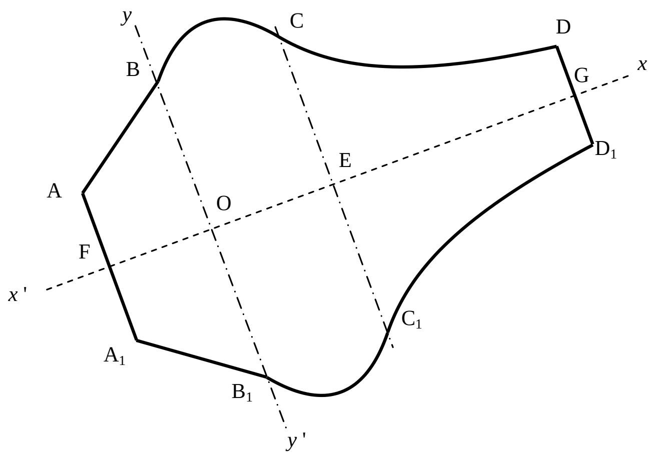
4. Déterminer la valeur de h, en fonction de R, pour laquelle le volume est maximal.

5. Calculer alors ce volume maximal en fonction du volume de la sphère.



5-56 : Jouet en bois

(d'après Bac Pro Productique bois, juin 2006)



Le dessin ci-dessus représente une pièce d'un jouet en bois. La droite (*x'x*) est un axe de symétrie pour cette pièce. Les points A_1, B_1, C_1 et D_1 sont respectivement les symétriques des points A, B, C et D.

[AB] est un segment de droite ; $\overset{\frown}{BC}$ est un arc de parabole ; $\overset{\frown}{CD}$ est un arc d'hyperbole.

On donne les longueurs suivantes :

AA_1 = 6 cm ; BB_1 = 12 cm ; CC_1 = 12 cm ; DD_1 = 4 cm; OF = 2 cm ; OE = 4 cm ; OG = 12 cm.

1. Avec ces informations, placer dans le repère donné en annexe (à rendre avec la copie) les points B_1, C, C_1, A et A_1. On précisera leurs coordonnées.

2. Etude de l'arc de parabole $\overset{\frown}{BC}$: on cherche la fonction *f* définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où *a*, *b* et *c* sont des nombres réels représentant cette parabole.

a. Pour déterminer *a*, *b* et *c* on sait que $\overset{\frown}{BC}$ passe par B, passe par C et que la tangente à $\overset{\frown}{BC}$ en B est la droite (AB).

Montrer, dans cet ordre, que $c = 6$, $b = 1{,}5$, $a = -0{,}375$.

b. L'arc de parabole $\overset{\frown}{BC}$ est la représentation graphique de la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = -0{,}375x^2 + 1{,}5x + 6.$$

Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

c. Dans le repère défini dans l'annexe, tracer l'arc de parabole $\overset{\frown}{BC}$.

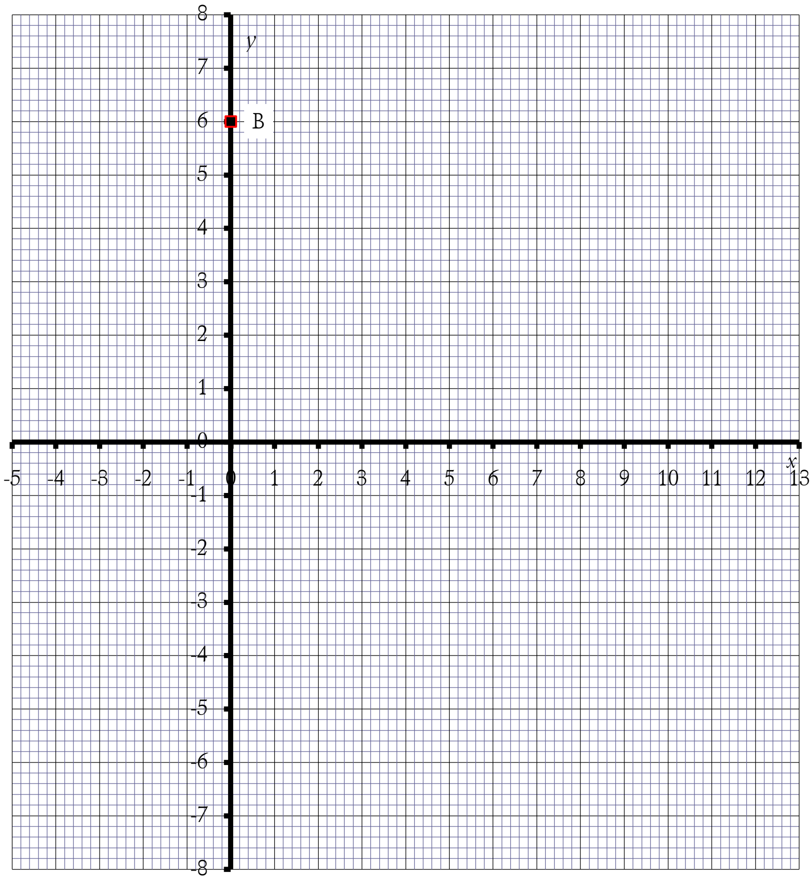
3. Etude de l'arc $\overset{\frown}{CD}$: l'arc d'hyperbole $\overset{\frown}{CD}$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle [4 ; 12] par : $g(x)=\dfrac{a}{x}$.

a. Montrer que $g(x)=\dfrac{24}{x}$.

b. Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

4. Vérifiez que $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CD}$ ont même tangente en C.

5. Dans le repère de l'annexe, terminer le tracé du contour de la pièce de bois.



5-57 : Courbes de Bézier

On considère trois points du plan A, B et C ainsi qu'un réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. On définit les points P et Q de sorte que P soit le barycentre de $\{(A, t) ; (B, 1-t)\}$ et Q celui de $\{(B, t) ; (C, 1-t)\}$; enfin on définit M comme le barycentre de $\{(P, t) ; (Q, 1-t)\}$.

1. Exprimer les coordonnées de P, Q et M en fonction de t et des coordonnées de A, B, C que l'on notera (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C). On notera $x(t)$ et $y(t)$ celles de M.

2. a. Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

b. Que peut-on dire des points M si B est au milieu de $[AC]$?

c. Peut-on trouver une relation du type $y = f(x)$ entre $x(t)$ et $y(t)$ (on pourra faire l'essai en prenant $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 1)$ et $C(1 ; 0)$) ?

3. En passant votre calculatrice en mode PARAM tracez la courbe paramétrée d'équations (X(T) = $x(t)$; Y(T) = $y(t)$) avec $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 1)$ et $C(1 ; 0)$.

4. L'intérêt de la courbe précédente est que seuls les points A, B et C vont intervenir dans la définition ; si on déplace un point la courbe est automatiquement changée.

On veut rajouter un point $D(x_D\,;y_D)$ et recalculer une courbe sur l'idée précédente : montrez qu'il faut alors calculer les coordonnées de M', barycentre de $\{(A, t^3)\,;(B, 3t^2(1-t))\,;(C, 3t(1-t)^2)\,;(D, (1-t)^3\}$.

a. Déduisez-en les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ coordonnées de M'.

b. Tracez la courbe des points M' obtenue.

5. Ceux qui disposent de Chamois peuvent voir ce que ça donne avec le fichier
http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/1S/bezier.cha