DÉRIVABILITÉ d'une fonction

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un point.

1. Dérivabilité en un point

1.1 Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un réel ℓ tel que l'accroissement moyen ait pour limite ℓ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell$$

Note : h tend vers 0 de façon que $x_0 + h \in I$

2) Il existe un réel ℓ et une fonction φ tels que pour tout h tel que $x_0 + h \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

Démonstration

Supposons la condition 1). Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell$$

Posons, pour $h \neq 0$: $$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \ell$$

Par hypothèse, on a ainsi : $$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

De plus : $$h\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \ell h$$

D'où la condition 2) : $$f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

Réciproquement, supposons la condition 2) :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

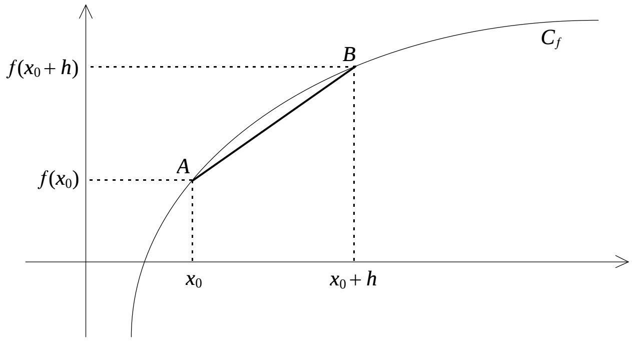
Pour $h \neq 0$, on a : $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)$$

Et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il vient : $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell$$

D'où la condition 1).

Vocabulaire :

- La quantité $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle l'accroissement moyen de f en x_0. Graphiquement, elle représente le **coefficient directeur de la sécante à la courbe C_f de f entre les points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$**.



- La condition 1) peut donc aussi se traduire par : **l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite finie**.
- L'écriture sous la forme $f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h)$ (où $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$) s'appelle le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0.
- La condition 2) peut donc encore se traduire par : **f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0**.

1.2. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I.

Lorsque l'une des deux conditions du théorème ci-dessus est vérifiée, on dit que :

f est dérivable en x_0

Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et on le note $f'(x_0)$.

Commentaires :

- la limite de l'accroissement moyen de f en x_0 (lorsqu'il existe) peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ces transformations d'écritures se font via le changement de variable : $x = x_0 + h$

- Le développement limité de f en x (lorsqu'il existe) peut encore se noter :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0)$$

(Cette dernière relation s'appelle "formule de Taylor-Young appliquée à f en x_0 à l'ordre 1")

- La formule de Taylor-Young, ci-dessus, peut encore s'écrire :

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

Avec la notation des Physiciens : $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y(x_0) = f(x) - f(x_0)$, nous obtenons :

$$\Delta y(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\varepsilon(\Delta x)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient l'écriture différentielle des Physiciens :

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x \quad \text{ou encore} \quad f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

- Lorsque l'accroissement moyen n'admet pas de limite en x_0, il se peut qu'il en admette une à droite (ou à gauche) de x_0. On dit alors que f est dérivable à droite (ou à gauche) en x_0. (voir exemple de la fonction "valeur absolue" en 0 un peu plus bas)

<u>Exemples d'utilisation de la définition</u> :

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Étudier sa dérivabilité en 0.

   Pour cela, on évalue la limite de l'accroissement moyen de f en $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

   D'où :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

   La limite n'est pas finie. **La fonction "racine carrée" n'est donc pas dérivable en 0.**

   Cependant, la courbe admet, au point d'abscisse 0, une demi-tangente verticale.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Étudier sa dérivabilité en 0.

   Nous avons pour tout $h \neq 0$:
$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

   Or, la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}-\frac{h}{h} = -1$$

   (Les limites à gauche et à droite sont différentes...)

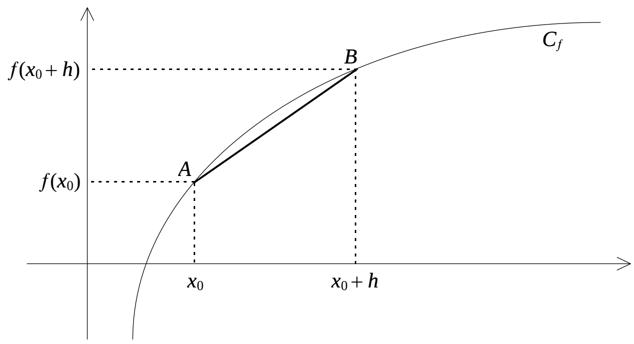
   L'accroissement moyen de la fonction f n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

   Cependant, elle est dérivable "à droite" de 0 et "à gauche" de 0.

   La courbe admet donc deux demi-tangentes distinctes de coefficients directeurs respectifs 1 et −1

2. Différentes interprétations du nombre dérivé

<u>**2.1. Interprétation graphique du nombre dérivé**</u> : il représente le **coefficient directeur de la tangente à C_f au point de C_f d'abscisse x_0** (dans l'hypothèse où ce coefficient directeur et cette tangente existent !)



Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0 :

- le point B tend vers le point A
- la droite (AB) tend alors vers la tangente à C_f en A
- l'accroissement moyen de f en x_0 tend vers $f'(x_0)$.

À la limite, le point B est en A, la droite (AB) est alors tangente à C_f en A et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

2.2. Interprétation numérique du nombre dérivé :

On a vu que lorsque f est dérivable en x_0, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

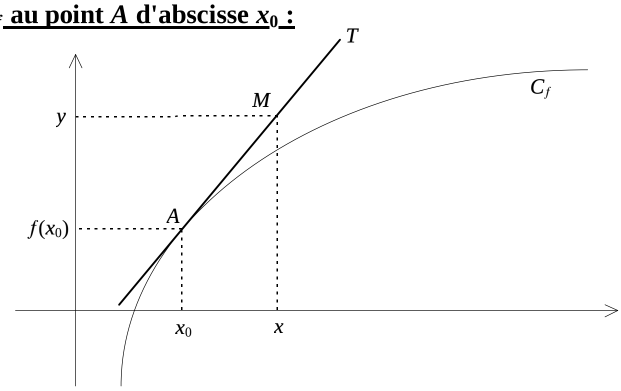
Ainsi lorsque x est voisin de x_0, on a l'approximation :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

L'application $x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ s'appelle approximation affine de f en x_0.

(Si, si, regardez bien, c'est une application affine ! Car elle est du type $x \mapsto ax + b$ avec $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$...)

2.3. Détermination d'une équation de la tangente T à C_f au point A d'abscisse x_0 :



La méthode est classique : soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct de A. Le coefficient directeur de T est :

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

D'où une équation de T : $\quad$ $\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

On constate que la tangente T n'est autre que la représentation graphique de l'approximation affine de f (en x_0).

Exemples : On donne : $\quad f(x) = -x^2 + 3$

Équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0 = 2$?

On calcule $f'(2)$: $\quad \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{-(2+h)^2 + 3 - (-2^2 + 3)}{h} = \dfrac{-4h - h^2}{h} = -4 - h$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-4 - h) = -4$$

Bien sûr, si l'on sait que $f'(x) = -2x$, on obtient immédiatement $f'(2) = -4$.

L'équation de T est donc : $\quad y = f(2) + f'(2)(x - 2) = -1 - 4(x - 2) = -4x + 7$

Autre méthode (pour ceux qui ont oublié la formule) : une équation de T est de la forme $y = f'(2)x + b$.

La condition $f(2) = -1$ livre alors $b = 7$.

2.2. Interprétation cinématique du nombre dérivé :

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

3. Fonction dérivée

3.1. Définition

Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.

On définit alors la fonction dérivée, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Nous savons déjà dériver un certain nombre de fonctions. Se reporter au tableau des dérivées pour en avoir un aperçu. Les physiciens notent : $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

On montre (voir quelques démonstrations au paragraphe 5) que la somme et le produit de fonctions dérivables (sur un intervalle I) est dérivable (sur I). De même pour le quotient f/g de deux fonctions dérivables où g ne s'annule pas sur I. On montrera également que les fonctions du type $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles le sont sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Donnons à présent un théorème fondamental :

3.2. Théorème

Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Démonstration :

Soit $x_0 \in I$. Puisque f est dérivable en x_0, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

Posons $x = x_0 + h$, il vient alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0) \text{ où } \lim_{x\to x_0} \varphi(x - x_0) = 0$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0)\right)$$

Or $\lim_{x\to x_0} (x - x_0)f'(x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est un nombre fini et $\lim_{x\to x_0} (x - x_0)\varphi(x - x_0) = 0$

D'où $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La fonction f est donc continue en x_0.

Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 de I, on en déduit que f est continue sur I.

Remarques :

- **La réciproque du théorème 3.2. est fausse**. En effet, il existe des fonctions continues en un point x_0 et non dérivables en x_0. C'est le cas, par exemple, de la fonction "valeur absolue" (voir ci-dessus)
- **Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue** :

  Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

  Montrons que f est continue en 0 :

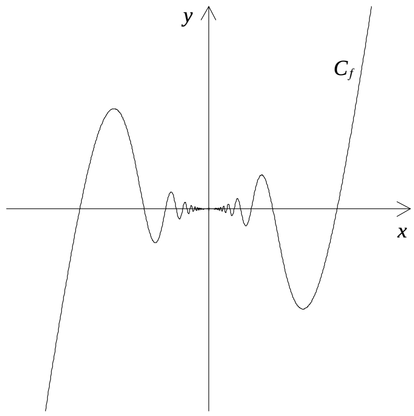
  Nous avons, pour tout réel $x \neq 0$: $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$

Donc : $$x^2 \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant x^2$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0 \ \text{(puisque } \lim_{x\to 0} x^2 = 0)$$

Donc : $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$



Donc f est continue en 0.

Montrons que f est dérivable en 0 :

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons : $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$$

Or : $$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(Même type de preuve que ci-dessus. On écrit : $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$)

Donc : $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f\,'(0) = 0$.

Cependant $f\,'$ n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f\,'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, mais la quantité $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. (Voir leçon sur la continuité)

Donc $f\,'$ n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Moralité : pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point x_0, il ne faut surtout pas étudier la limite de $f\,'$ en x_0 (ce serait étudier la continuité de la dérivée en x_0) mais étudier la limite de l'accroissement moyen. Cependant, si $f\,'$ admet une limite (finie) en x_0 alors f est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f\,'(x_0)$.

Remarque : si f est dérivable en x_0, alors l'application "coefficient directeur" φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f\,'(x_0)$ est continue en x_0 puisque $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f\,'(x_0)$.

Exercice :

Démontrer que si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$ (résultat admis en classe de Première).

Pour tout x_0 de I, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, elles admettent une développement limité à l'ordre 1 en x_0 :

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0 \ \text{ et } \ v(x_0 + h) = v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$$

En multipliant ces deux développements, il vient :

$$u(x_0 + h)\, v(x_0 + h) = (u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h))(v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h))$$

$$u(x_0 + h)\, v(x_0 + h) = u(x_0)\, v(x_0) + (u'(x_0)\, v(x_0) + u(x_0)\, v'(x_0))h + h\Phi(h)$$

où $\Phi(h) = u(x_0)\ \psi(h)) + u'(x_0)\ v'(x_0)h + u'(x_0)h\psi(h) + \varphi(h)v'(x_0)h + h\varphi(h)\psi(h)$

Nous avons donc : $uv(x_0 + h) = uv(x_0) + (u'(x_0)\ v(x_0) + u(x_0)\ v'(x_0))h + h\Phi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0} \Phi(h) = 0$

La fonction produit uv admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donc uv est dérivable en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a uv dérivable sur I. De plus, le nombre dérivé de uv en x_0 est directement lisible dans le développement limité, il s'agit de $u'(x_0)\ v(x_0) + u(x_0)\ v'(x_0)$. Finalement, on a sur I :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

4. Applications de la dérivation à l'étude de fonctions

Bien qu'intuitivement évident, on admettra le théorème suivant. (Sa démonstration découle en partie du théorème des accroissements finis qui est hors-programme. Ce théorème découle lui-même du théorème de Rolle dont la démonstration repose sur le fait qu'une fonction continue sur un intervalle borné est bornée et atteint ses bornes. Or, cette dernière propriété repose en partie sur le théorème de Bolzano-Weierstrass dont la démonstration ne peut se comprendre qu'après avoir établi un certain nombre d'éléments de topologie de la droite réelle...)

4.1. Théorème *Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si

$$\begin{cases} f' \geqslant 0 \text{ sur } I \text{ (resp. } f' \leqslant 0) \\ \text{L'ensemble } \{x \in I \quad \text{tels que} \quad f'(x) = 0\} \text{ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide} \end{cases}$$

Commentaires : les commentaires suivants sont transposables aux cas "$f' < 0$ sur I" :

- si $f' > 0$ sur I, sauf en des points isolés où elle s'annule, on a quand même la stricte croissance de f sur I.
- il n'y a pas équivalence entre les conditions "$f' > 0$ sur I" et "f strictement croissante sur I".

Exemples :

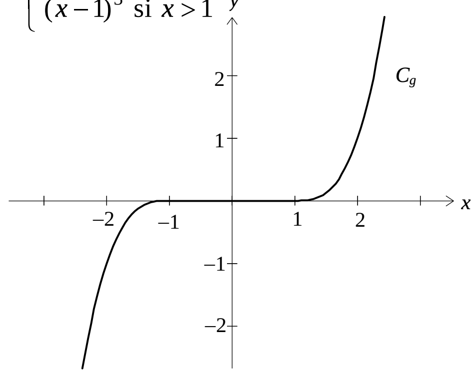
1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. Notre dérivée est toujours strictement positive sauf en 0 où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Cet exemple montre donc qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle I n'a pas nécessairement une dérivée strictement positive sur I.

2) On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 \text{ si } x < -1 \\ 0 \text{ si } x \in [-1\,;\,1] \\ (x-1)^3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

   On a $g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 \text{ si } x < -1 \\ 0 \text{ si } x \in [-1\,;\,1] \\ 3(x-1)^2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

   La dérivée g' est toujours positive. De plus elle est nulle sur tout l'intervalle $[-1\,;\,1]$. Par conséquent, la fonction g est croissante (non strictement) sur $\mathbb{R}$.



3) Soit h la fonction f définie sur $]-2 ; -1[\cup]1 ; 2[$ par $h(x) = -1$ si $x \in]-2 ; -1[$ et $h(x) = 1$ si $x \in]1 ; 2[$. On a clairement $h' = 0$ sur $]-2 ; -1[\cup]1 ; 2[$. Cependant, h n'est pas constante, d'où la nécessité de la condition "I est un intervalle" dans le théorème 4.1.

Le théorème suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

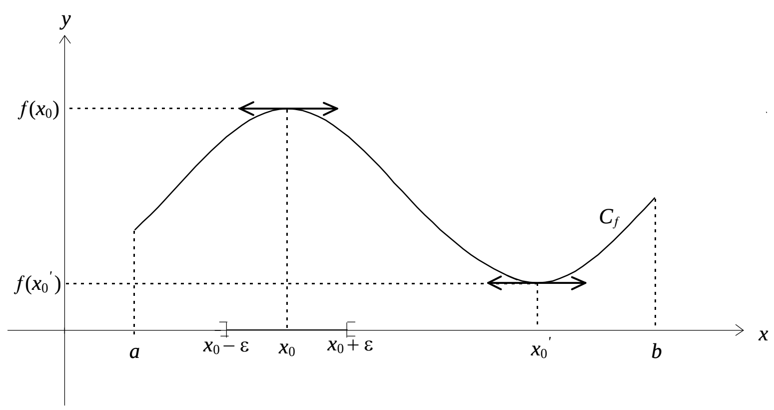
4.2. Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$

Avant de démontrer ce théorème, donnons quelques explications :

- Si a et b représentent les extrémités de l'intervalle I (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a ; b[$. (C'est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I)
- Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0 - \varepsilon ; x_0 + \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) tel que pour tout x de J on ait $f(x) \leqslant f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.



Démonstration :

Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon ; x_0 + \varepsilon[$ soit contenu dans I.

Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local :

Pour $h \in]0 ; \varepsilon[$, on a : $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

Pour $h \in]-\varepsilon ; 0[$, on a : $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

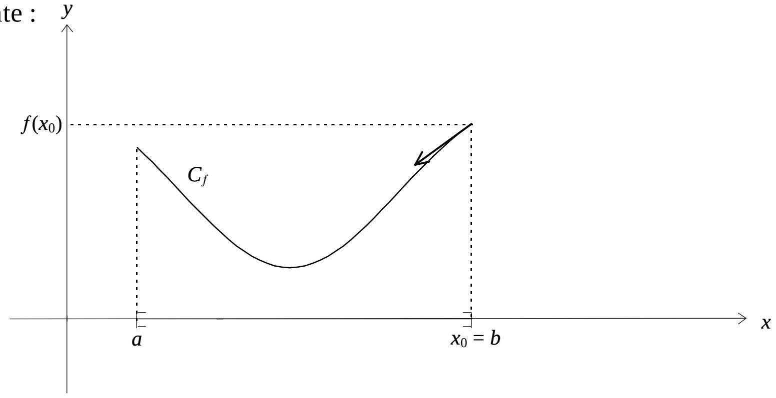
Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement $f'(x_0) \geqslant 0$ et $f'(x_0) \leqslant 0$ d'où $f'(x_0) = 0$.

Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même.

Mise en garde sur le théorème 4.2. :

Si x_0 est une extrémité de I, la fonction f peut avoir un extremum en x_0 sans nécessairement avoir $f'(x_0) = 0$.

C'est ce qu'illustre la figure suivante :



Le théorème suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0 :

4.3. Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I.

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0

Nous admettrons ce théorème dont la démonstration repose, là encore, sur le théorème des accroissements finis.

Les trois théorèmes précédents sont largement exploités dans les exercices notamment lors de la mise en place du tableau de variation d'une fonction.

5. Dérivation d'une fonction composée et applications

5.1. Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.

La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(v \circ u)'(x) = u'(x)\, v'(u(x))$

Démonstration :

Soit $x_0 \in I$.

On écrit :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0} = \frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)} \times \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$$

Posons $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0} = \frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0} \times \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y\to y_0} \frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0} = v'(y_0)$$

Et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)$$

D'où : $$\lim_{x\to x_0} \frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)\times v'(y_0) = u'(x_0)\times v'(u(x_0))$$

C'est-à-dire : $$(v \text{ o } u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de v o u sur I et

$$(v \text{ o } u)'(x) = u'(x)\, v'(u(x))$$

5.2. Conséquences du théorème 5.1. : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Si $f = u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant pas sur I si $n \leqslant -1$) alors f est dérivable sur I et $f' = n\, u'\, u^{n-1}$

Exemple :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$. La fonction u est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \quad \text{pour tout } x \in\,]0\,;+\infty[$$

2. Dans la pratique, s'il n'y a pas d'ambiguïté avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :

$$f(x) = \left(2x^2 - x + 1\right)^6 \qquad f'(x) = 6(4x-1)\left(2x^2 - x + 1\right)^5$$

Exercice : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

Démontrer : f paire $\Rightarrow$ f' impaire

f impaire $\Rightarrow$ f' paire.

Si f est paire, on a pour tout $x \in I$: $f(x) = f(-x) = f \text{ o } g(x)$ (Où g est la fonction qui à x associe $-x$)

En dérivant, on obtient : $$f'(x) = g'(x)f'(g(x)) = -f'(-x)$$

Donc f' est impaire.

Même raisonnement pour l'autre implication.

5.3. Théorème *Dérivation de la bijection réciproque* *(hors programme)*

Soit f une **bijection** dérivable d'un intervalle I sur un intervalle J. On note f^{-1} la bijection reciproque de f.

Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Démonstration :

Nous allons montrer que l'accroissement moyen ci-dessous admet une limite lorsque y tend vers y_0 :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)}$$

Notons $x = f^{-1}(y)$ ainsi :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Or, f^{-1} est continue en y_0 (voir leçon sur la continuité) donc :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{y \to y_0} x = x_0$$

Autrement dit, lorsque y tend vers y_0, alors x tend vers x_0, ce qui nous permet d'écrire :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

puisque f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$.

Ce qui prouve que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Remarque : si de plus, pour tout x de I, on a $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est alors dérivable sur $f(I)$ et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad \text{sur } f(I)$$

6. Tableaux des dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \{k\dfrac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{t} ; k \in \mathbb{Z}\}$

Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

<u>Exemple de démonstrations</u> :

- Cas $f(x) = x^n$ lorsque $n > 0$.

  L'accroissement moyen de f en x s'écrit : (en utilisant la formule du binôme de Newton)

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} = n\,x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}$$

D'où :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} n\,x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1} = n\,x^{n-1}$$

On peut aussi procéder par récurrence en utilisant la formule de dérivation d'un produit (ce qui évite l'emploi de la formule du binôme).

- Cas $f(x) = \sin x$.

  L'accroissement moyen de f en x s'écrit :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \,\frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h}\cos x$$

Or :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

(Voir DM)

D'où :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	Dérivée	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k : constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n $(n \in \mathbb{Z})$	$n\,u'\,u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'\,(v' \circ u)$	

Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Exemples de démonstrations :

- Relation $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Pour tout $x \in I$, posons $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$.

On a : $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{v(x+h)} - \dfrac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{h\,v(x)\,v(x+h)}$$

Or, puisque v est dérivable, on peut écrire :

$$v(x+h) = v(x) + v'(x)h + h\varphi(h)$$

Remplaçons $v(x) - v(x+h)$ par $-(v'(x)h + h\varphi(h))$; on obtient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{v'(x)\,h + h\varphi(h)}{h\,v(x)\,v(x+h)} = -\frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)\,v(x+h)}$$

D'où : $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)\,v(x+h)} = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

Donc f est dérivable et $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$ d'où : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

- Relation $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

On écrit $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ et on utilise la dérivée d'un produit (déjà démontrée en exercice) et le résultat ci-dessus.

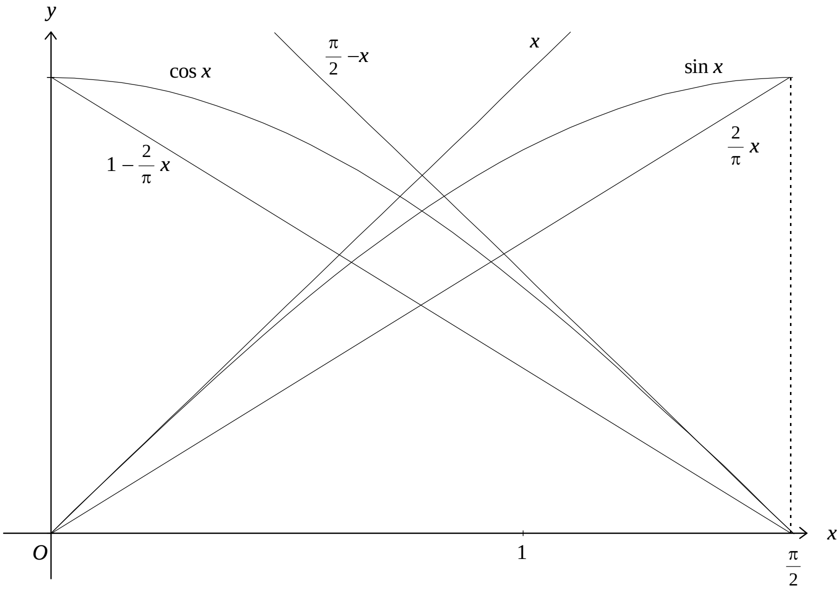
7. Étude de la fonction tangente

Voir ce DM spécifique : http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/DevoirsT_fichiers/DM4TS.pdf

8. Quelques inégalités

- Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x \quad \text{et} \quad 1 - \frac{2}{\pi}x \leqslant \cos x \leqslant \frac{\pi}{2} - x$$



Notons $I = [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$.

On étudie les fonctions f et g définies sur I par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$.

On a, pour $x \in I$: $\qquad f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

$$g''(x) = -\sin x \leqslant 0$$

La fonction f' est positive sur I, donc f est croissante sur I et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur I, donc : $\qquad \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in I$

La fonction g'' est négative sur I, donc g' est décroissante sur I.

Or : $\qquad g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$

Comme g' est continue et strictement décroissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Donc g' est positive sur $[0\ ;\ \alpha]$ puis négative sur $[\alpha\ ;\ \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que g est croissante sur $[0\ ;\ \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\ ;\ \frac{\pi}{2}]$.

Mais $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc g est positive sur I :

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \text{ pour tout } x \in I$$

On montre de même que : $1 - \frac{2}{\pi}x \leqslant \cos x \leqslant \frac{\pi}{2} - x$ pour tout $x \in I$

- Démontrer que pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, on a : $x \leqslant \tan x$

  Posons $f(x) = \tan x - x$ pour $x \in J = [0 ; \frac{\pi}{2}[$.

  On a : $f\,'(x) = \tan^2 x \geqslant 0$ pour tout $x \in J$

  Donc f est croissante sur J.

  En outre, $f(0) = 0$ donc f est positive sur J d'où le résultat.

Remarque : à l'aide de l'encadrement $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ démontré ci dessus pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, on déduit que :

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x} \text{ pour tout } x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[.$$

On montre (parité des fonctions en jeu) que l'encadrement est aussi valable pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$.

Le théorème des gendarmes permet alors de retrouver la limite importante : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

9. Complément : inégalités des accroissements finis (Hors programme)

9.1. Théorème *Inégalité des accroissements finis*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f\,' \leqslant M$ sur I[1].

Alors, pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a :

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

Démonstration :

On utilise une fonction auxiliaire g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - Mx$$

La fonction g est dérivable sur I et on a : $g'(x) = f\,'(x) - M$

Or, $f\,' \leqslant M$ sur I, donc : $g' \leqslant 0$ sur I

La fonction g est donc décroissante sur I, ce qui signifie, puisque $a < b$, que l'on a :

$$g(a) \geqslant g(b)$$

C'est-à-dire : $f(a) - Ma \geqslant f(b) - Mb$

D'où l'on déduit finalement : $f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$

On raisonne de même avec la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - mx$ pour démontrer l'autre partie de l'encadrement.

(1) Si I est un segment (intervalle fermé et borné) cette condition est toujours réalisée car une fonction continue sur un segment est bornée.

Remarque : lorsque f' est continue sur I, on obtient aussi ce résultat en intégrant l'inégalité $m \leqslant f' \leqslant M$ entre a et b (voir le cours sur le calcul intégral)

Exercice : démontrer que si $m < f' < M$ sur I alors, pour tous a et b de I tels que $a < b$:

$$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$$

Remarque : les inégalités strictes persistent encore si $m \leqslant f' \leqslant M$ avec égalité en un nombre fini d'abscisses...

> 9.2. Théorème *inégalité des accroissements finis (bis)*
>
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
>
> S'il existe un réel M tel que $|f'| \leqslant M$ sur I alors pour tous réels a et b de I, on a :
>
> $$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que la condition $|f'| \leqslant M$ s'écrit encore $-M \leqslant f' \leqslant M$. On applique alors le théorème 9.1. :

si $a < b$ alors $-M(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$ c'est-à-dire $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$

si $a > b$ alors $-M(a-b) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(a-b)$ c'est-à-dire $|f(b) - f(a)| \leqslant M(a-b)$

Dans les deux cas, on a : $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$

Exemples :

- Encadrements de nombres réels.

  Montrer que : $\dfrac{\sqrt{2}}{12} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

  On applique le théorème 9.1. à la fonction f définie sur $\left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin(x)$.

- Démontrer que pour tous réels x et y : $|\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|$

  On applique l'inégalité des accroissements finis avec $f = \cos$.

> 9.3. Théorème
>
> Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
>
> Si $|f'| \leqslant g'$ sur I alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a :
>
> $$|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$$

Démonstration :

La condition $|f'| \leqslant g'$ sur I s'écrit encore : $-g' \leqslant f' \leqslant g'$ sur I

Soit h la fonction définie sur I par : $h(x) = f(x) - g(x)$

La fonction h est dérivable sur I (comme différence de deux fonctions qui le sont) et :

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in I$$

La fonction h est donc décroissante sur I.

Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a donc :

$$h(b) \leqslant h(a)$$

C'est-à-dire : $\underline{f(b) - f(a) \leqslant g(b) - g(a)}$

Soit k la fonction définie sur I par : $k(x) = f(x) + g(x)$

La fonction k est dérivable sur I (comme somme de deux fonctions qui le sont) et :

$$k'(x) = f'(x) + g'(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in I$$

La fonction k est donc croissante sur I.

Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a donc :

$$k(a) \leqslant k(b)$$

C'est-à-dire : $\underline{f(a) - f(b) \leqslant g(b) - g(a)}$

On en déduit bien que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$$

Là encore, on obtient le résultat en intégrant l'inégalité $-g' \leqslant f' \leqslant g'$ entre a et b.

Exercice (nécessite des connaissances sur la fonction logarithme népérien, on pourra consulter ce lien : http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursT_fichiers/ExpLn03.pdf)

Démontrer que pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

En déduire que la suite (S_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

(Cette suite (S_n) s'appelle la série "harmonique".)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(t) = \ln t$.

Soit $x \in \,]0\,;+\infty[$. Considérons l'intervalle $I = [x\,;x+1]$. La fonction f est dérivable sur I et $f'(t) = \frac{1}{t}$.

Pour tout $t \in I = [x\,;x+1]$, on a : $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $I \subset \,]0\,;+\infty[$)

C'est-à-dire : $\frac{1}{x+1} \leqslant f' \leqslant \frac{1}{x}$ sur I

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f et en choisissant $a = x$ et $b = x + 1$, nous obtenons :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

En particulier, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{x} \geqslant \ln(k+1) - \ln k$.

On en déduit que : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$.

Or, la suite (u_n) définie par $u_n = \ln(n+1)$ est divergente vers $+\infty$. On en déduit par comparaison que (S_n) diverge également vers $+\infty$.

Voir le cours sur le calcul intégral (http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursT_fichiers/CI04.pdf) pour une méthode plus simple.