Équations et inéquations du 1er degré

I. Équation

1/ Vocabulaire (rappels)

Un équation se présente sous la forme d'une égalité constituée de nombres, de lettres et de symboles mathématiques. Par exemple $2x-8=2(7-4,5x)$.
Le symbole $=$ partage l'équation en deux parties : le membre de gauche, $2x-8$; et le membre de droite, $2(7-4,5x)$.
La lettre x représente le nombre, ou les nombres, que l'on cherche : c'est l'inconnue. Lorsque l'inconnue est trouvée, on parle alors de solution(s) de l'équation. Un nombre solution doit satisfaire à une condition fondamentale : faire en sorte que les membres soient égaux après les avoir calculés en remplaçant l'inconnue par ce nombre. Pour résoudre une équation, il faut trouver toutes les solutions possibles.

2/ Tester une équation

Avant d'aborder la méthode générale de résolution des équations du 1er degré, on peut toujours tenter de trouver une solution « au hasard » . C'est ce qu'on appelle tester une équation ; on cherche à savoir si un nombre est une solution de l'équation.

Exemple/Méthode

Considérons la même équation qu'au début du cours $2x-8=2(7-4,5x)$. Pour l'instant, nous n'avons toujours pas de méthode permettant de trouver facilement la (ou les) solution(s).
Cependant, on peut toujours essayer de voir si un nombre, généralement donné ou choisi (presque) au hasard, est une solution de cette équation.
Prenons par exemple $x=-3$:

- on remplace x par -3 dans le membre de gauche : $2x-8=2\times(-3)-8=-6-8=-14$;
- puis dans le membre de droite : $2(7-4,5x)=2(7-4,5\times(-3))=2(7+13,5)=2\times20,5=41$;
- on compare les deux résultats : ici ils sont différents ;
- on conclut : $x=-3$ n'est donc pas une solution.

On pourra s'entraîner seul en vérifiant que $x=2$ est une solution de l'équation.

3/ Équations simples (à savoir résoudre)

Rappels

On pourra revoir les règles de calcul sur les nombres relatifs (très utiles ici !).

Méthode

Pour résoudre une équation du genre $x+5=-12$, on peut tout simplement se poser la question suivante : « Quel nombre puis-je ajouter à 5 pour trouver -12 ?». La réponse est -17 car $-17+5=-12$. On dit alors que la solution est $x=-17$.

Exemples

Résoudre dans cet état d'esprit les équations suivantes : $x-5=9$; $x+5=-3$; $-7+x=-12$; $4=7-x$; $-x+4=-5$; $6-x=8$.

Propriétés (règles de calcul à savoir retrouver)

Si a et b représentent deux nombres non nuls, on a les résolutions d'équations suivantes :

$\begin{array}{c}a+x=b\\x=b-a\end{array}$; $\begin{array}{c}x+a=b\\x=b-a\end{array}$; $\begin{array}{c}x-a=b\\x=b+a\end{array}$; $\begin{array}{c}-x+a=b\\x=a-b\end{array}$; $\begin{array}{c}ax=b\\x=\frac{b}{a}\end{array}$; $\begin{array}{c}\frac{x}{a}=b\\x=ba\end{array}$; $\begin{array}{c}\frac{a}{x}=b\\x=\frac{a}{b}\end{array}$ etc.

4/ Méthode générale pour résoudre une équation

Activité

- L'idée est de partir d'équations simples pour arriver progressivement à des équations plus complexes. Le principe que l'on va mettre en œuvre est le suivant : « lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on ne change pas les solutions ». Plus simplement, si deux nombres sont égaux, on peut bien leur ajouter à chacun un autre nombre sans les rendre différents. Par exemple, puisque $\frac{7}{2}=35\div 10$, on peut écrire une nouvelle égalité après avoir ajouté 8 à chaque membre : $\underbrace{\frac{7}{2}+\mathbf{8}}_{=11,5}=\underbrace{35\div 10+\mathbf{8}}_{=11,5}$.

- Appliquons ce principe à l'équation $-5+x=2$:

$$\begin{aligned}-5+x&=2\\-5+x\mathbf{+5}&=2\mathbf{+5}\\x&=7\end{aligned}$$

Ici, nous avons ajouter $\mathbf{5}$ à chaque membre afin d'obtenir la valeur de x. On dit qu'on a isolé x.

- Le deuxième principe que l'on va mettre en œuvre est la suivant : « lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre non nul les deux membres d'une équation, on ne change pas les solutions ». En admettent ce deuxième principe, on peut alors résoudre progressivement des équations plus difficiles :

$$\begin{aligned}3x&=-15\\\frac{3x}{\mathbf{3}}&=\frac{-15}{\mathbf{3}}\\x&=-5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7+3x&=-4\\-7+3x\mathbf{+7}&=-4\mathbf{+7}\\3x&=3\\\frac{3x}{\mathbf{3}}&=\frac{3}{\mathbf{3}}\\x&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9-3x&=15+2x\\9-3x\mathbf{+9}&=15+2x\mathbf{+9}\\-3x&=24+2x\\-3x\mathbf{-2x}&=24+2x\mathbf{-2x}\\-5x&=24\\\frac{-5x}{\mathbf{-5}}&=\frac{24}{\mathbf{-5}}\\x&=-\frac{24}{5}\end{aligned}$$

Propriétés fondamentales des équations (principes énoncés dans l'activité)

a, b et k représentent trois nombres non nuls.

Si $a=b$, on a alors les égalités suivantes $\begin{array}{c}a+k=b+k\ ;\ a-k=b-k\\a\times k=b\times k\ ;\ a\div k=b\div k\end{array}$.

Exemple type avec méthode

On veut résoudre cette équation $8(2x-5)=-12-(x-6)$.

- 1ère étape : $8(2x-5)=-12-(x-6)$
  $16x-40=-12-x+6$
- 2ème étape : $16x-40=-6-x$
- 3ème étape : $16x-40\mathbf{+40}=-6-x\mathbf{+40}$
  $16x=34-x$
- 4ème étape : $16x\mathbf{+x}=34-x\mathbf{+x}$
  $17x=34$
- 5ème étape : $\frac{17x}{\mathbf{17}}=\frac{34}{\mathbf{17}}$
  $1x=\frac{34}{17}$
  $x=2$

- 1ère étape : on développe chaque membre.
- 2ème étape : on réduit chaque membre.
- 3ème étape : on fait en sorte de mettre les « nombres » entre eux grâce au premier principe vu dans l'activité, puis on réduit.
- 4ème étape : on fait en sorte de mettre les « x » entre eux grâce aussi au premier principe vu dans l'activité, puis on réduit.
- 5ème étape : on fait en sorte d'isoler x grâce au deuxième principe vu dans l'activité ; on donne le résultat sous le forme d'une fraction irréductible, voire sous la forme d'un entier.

D'un seul tenant cela donne :

$$\begin{gathered}8(2x-5)=-12-(x-6)\\16x-40=-12-x+6\\16x-40=-6-x\\16x-40\mathbf{+40}=-6-x\mathbf{+40}\\16x=34-x\\16x\mathbf{+x}=34-x\mathbf{+x}\\17x=34\\\frac{17x}{\mathbf{17}}=\frac{34}{\mathbf{17}}\\1x=\frac{34}{17}\\x=2\end{gathered}$$

5/ Pour aller un peu plus vite...

Exemple

Observons l'exemple ci-contre et tentons de trouver un « raccourci » :

$$\begin{gathered}x\underline{+8}=-3\\x+8\mathbf{-8}=-3\mathbf{-8}\\x=-3\underline{-8}\end{gathered}$$

Si on « oublie » la deuxième ligne, on observe que le terme $+8$ situé dans le membre de gauche devient -8 lorsqu'il « est passé » dans le membre de droite.

On admet alors la propriété suivante...

Propriété

Dans une équation, on peut changer un terme de membre sans modifier les solutions si on change son signe en son opposé.

Exemple/Méthode

$$\begin{aligned}\mathbf{-5}+5x&=x+8\\ 5x&=x+8\mathbf{+5}\\ 5x&=\mathbf{x}+13\\ 5x\mathbf{-x}&=13\\ 4x&=13\\ x&=\frac{13}{4}\end{aligned}$$

- On change le terme -5 de membre, il devient $+5$ dans celui de droite.
- On change de membre le terme x, il devient $-x$ dans le membre de gauche.
- On arrive à une équation de la forme $ax=b$ dont la solution est $x=\frac{b}{a}$.

Un exemple à connaître et à savoir refaire

$$\begin{aligned}-7(x+2)-5x&=3-5\times(-5x+5)\\ -7x-14-5x&=3+25x-25\\ -12x\mathbf{-14}&=-22\mathbf{+25}x\\ -12x\mathbf{-25}x&=-22\mathbf{+14}\\ -27x&=-8\\ x&=\frac{-27}{-8}\\ x&=\frac{27}{8}\end{aligned}$$

6/ Mise en équation (méthode)

Énoncé du problème

Sarah a 5 ans de plus que Latifa et Mathieu a 3 ans de moins que Latifa. La somme de leurs âges est 59. Quels sont leurs âges ?

Méthode de résolution

- Choix de l'inconnue
  x représente l'âge de Latifa.

- Expression des données de l'énoncé en fonction de l'inconnue
  En fonction de x, l'âge de Sarah est $x+5$ ans car elle a 5 ans de plus que Latifa. De même, $x-3$ correspond à l'âge de Mathieu.

- Mise en équation
  Puisque la somme des âges est 59, on peut traduire le problème par l'équation suivante : $x+(x+5)+(x-3)=59$.

- Résolution de l'équation

$$\begin{aligned}x+(x+5)+(x-3)&=59\\ x+x+5+x-3&=59\\ 3x+2&=59\\ 3x&=59-2\\ 3x&=57\\ x&=\frac{57}{3}\\ x&=19\end{aligned}$$

- Conclusion
  Latifa a 19 ans, Sarah a 24 ans et Mathieu a 16 ans.

II. Inéquation

1/ Symboles à connaître

$... < ...$ signifie « est strictement inférieur à ». $... > ...$ signifie « est strictement supérieur à ».
$... \leqslant ...$ signifie « est inférieur ou égal à ». $... \geqslant ...$ signifie « est supérieur ou égal à ».

Exemples
Si x est un nombre tel que $x \geqslant -2$, x représente un nombre supérieur à -2 mais qui peut aussi être égal à -2. Si y est un nombre tel que $y < 3$, y représente un nombre inférieur à 3 mais qui ne peut pas êtreègal à 3.

2/ Inéquations

Un inéquation se présente sous la forme d'un inégalité contenant l'un des symboles $... < ...$, $... > ...$, $... \leqslant ...$ ou $... \geqslant ...$. Elle contient, comme les équations, des lettres, des nombres, et des symboles algébriques. Par exemple $2x+2 < x-5$.
Le vocabulaire est le même que pour les équations : membre de gauche, membre de droite, inconnue et solution de l'inéquation.
Un solution de l'inéquation (donnée au dessus) est un nombre qui rend le membre de gauche $2x+2$ strictement inférieur au membre de droite $x-5$ (comme pour les équations, il faut calculer le membre de gauche et le membre de droite séparément en remplaçant l'inconnue par le nombre).

3/ Tester une inéquation

C'est le même principe que pour les équations...

Exemple/Méthode
Est-ce que $x=-2$ est une solution de l'inéquation $3x+7 > -2x+2$? Pour cela, il faut la tester en remplaçant x par -2 dans chaque membre.

- Calculons séparément chaque membre
  $3\times(-2)+7=-6+7=1$
  $-2\times(-2)+2=4+2=6$
- Comparons
  1 n'est pas strictement supérieur à 6.
- Concluons
  $x=-2$ n'est pas une solution de l'inéquation.

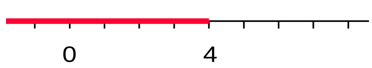
Je laisse au lecteur le soin de vérifier que $x=0$ est une solution puis de trouver ce qui se passe pour $x=-1$.

4/ Représentation des solutions sur une droite graduée

Quelles sont les solutions de l'inéquation $x+1 \leqslant 5$? On devine assez facilement que des nombres comme 3, 0, -10 sont des solutions (il suffit de remplacer !).
Adaptons ici le premier principe qui nous avait aidé à résoudre des équations : « lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une inéquation, on ne change pas les solutions » :

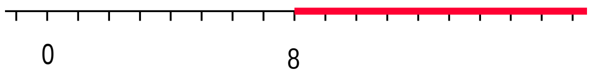
$$\begin{aligned} x+1 &\leqslant 5 \\ x+1\mathbf{-1} &\leqslant 5\mathbf{-1} \\ x &\leqslant 4 \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont donc tous les nombres inférieurs ou égal à 4. Puisqu'il y en a une infinité, il peut être intéressant de les représenter sur une droite graduée (histoire d'avoir une vue d'ensemble) :



Voici un autre exemple :

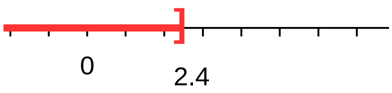
$$\begin{aligned} x-3&>2 \\ x+1+\mathbf{3}&>5+\mathbf{3} \\ x&>8 \end{aligned}$$



Cependant, un problème se pose : comment indiquer sur le graphique que le nombre 8 ne fait pas partie des solutions ? (de même que dans le premier exemple où 4 doit cette fois-ci faire partie des solutions)

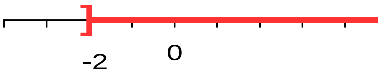
Pour cela, on utilise un crochet en lui donnant une orientation : $[$ (crochet tourné vers la droite), ou $]$ (crochet tourné vers la gauche). Suivant son **<u>orientation par rapport au trait rouge</u>**, c'est à dire par rapport à l'ensemble des solutions, il indique si le nombre « au bord » fait partie ou non partie des solutions. Voici quelques exemples :

- $x \leqslant 2{,}4$



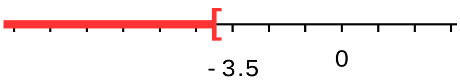
$2{,}4$ fait partie des solutions car le symbole $\leq$ signifie inférieur ou **<u>égal</u>**. Pour le coder graphiquement, le crochet est tourné vers le trait rouge, c'est à dire vers les solutions.

- $x>-2$



-2 ne fait pas partie des solutions car le symbole $>$ signifie **<u>strictement inférieur</u>**. Pour le coder graphiquement, le crochet est tourné à l'opposé du trait rouge, il tourne le dos aux solutions.

- $-3{,}5>x$



Le crochet est tourné à l'opposé du trait rouge, il tourne le dos aux solutions, car $-3{,}5$ n'est pas une solution.

- $0 \leqslant x$

Le crochet est tourné vers le trait rouge, c'est à dire vers les solutions , car 0 est une solution.

Pour s'entraîner, on pourra représenter les solutions des deux premières inéquations du paragraphe.

5/ <u>Résolution des Inéquations simples</u>

<u>Exemple 1</u>

Résoudre l'inéquation $x+5 \geqslant 12$, c'est chercher tous les nombres qui répondent à la question suivante : « Quel nombre dois-je ajouter à 5 pour trouver un résultat supérieur ou égal à 12 ? ».
On devine (assez facilement ?) que ce sont tous les nombres supérieurs ou égal à 7, c'est à dire $x \geqslant 7$.
Résoudre dans cet état d'esprit les inéquations suivantes : $x-5>2$; $x+5 \leqslant 2$; $3+x \geq -5$; $5>2+x$; $-3+x \leq 1$.

<u>Exemple 2</u>

Résoudre l'inéquation $2x>8$, c'est chercher tous les nombres qui répondent à la question suivante : « Quel nombre dois-je multiplier à 2 pour trouver un résultat strictement supérieur à 8 ? ».

On devine (toujours facilement ?) que ce sont tous les nombres strictement supérieurs à 4, c'est à dire $x>4$.
Résoudre dans cet état d'esprit les inéquations suivantes : $2x>1$; $3x>15$; $7x\leq -14$; $-10\geq 2x$.

Exemple 3

Résoudre l'inéquation $-2x>6$, c'est chercher tous les nombres qui répondent à la question suivante : « Quel nombre dois-je multiplier à -2 pour trouver un résultat strictement inférieur à 6 ? ».
On devine (pas facile, n'est-ce pas ?) que ce sont tous les nombres strictement inférieurs à -3, c'est à dire $x<-3$. Résoudre dans cet état d'esprit les inéquations suivantes : $-2x<1$; $-2x<-15$

Remarque fondamentale pour la résolution des inéquations

Il est important dans le dernier exemple de faire l'observation suivante. Entre l'inéquation de départ $-2x>6$ et celle du résultat $x<-3$, il y a une inversion du sens : on passe du symbole strictement supérieur $>$ au symbole strictement inférieur $<$ ($-2x$ strictement supérieur à 6 donne x strictement inférieur à -3).
Cette inversion dépend du signe du « coefficient attaché à x » ; ici c'est le nombre -2. Lorsque ce nombre est négatif, on peut être sûr qu'il y aura une inversion du sens de l'inéquation.
Comment expliquer ce phénomène ? Regardons les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{l} 5>-2 \\ 10>-4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5>-2 \\ -10<+4 \end{array}$$

Dans le premier bloc, on a multiplié par $+2$ et dans le deuxième par -2. On observe bien le changement de sens (c'est à dire de l'ordre) lorsque le nombre est négatif.
Maintenant, regardons celles-ci :

$$\begin{array}{l} -9\leq 15 \\ -3\leq 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -9\leq 15 \\ +3\geq -5 \end{array}$$

Dans le premier bloc, on a divisé par $+3$ et dans le deuxième par -3. On observe aussi un changement de sens (c'est à dire de l'ordre) lorsque le nombre est négatif.
Revenons maintenant à l'inéquation de l'exemple 3, c'est à dire $-2x>6$. Pour obtenir les solutions, c'est à dire $x<-3$, il suffit en fait de diviser chaque membre par -2 (le coefficient attaché à x). Mais puisque ce nombre est négatif, il faut changer le sens de l'inéquation. Cela donne :

$$\begin{array}{l} -2x>6 \\ \dfrac{-2x}{\mathbf{-2}}<\dfrac{6}{\mathbf{-2}} \quad (c'est\ ici\ que\ l'on\ change\ de\ sens) \\ x<-3 \end{array}$$

D'où la propriété suivante...

Propriétés (à comprendre)

Si a et b représentent deux nombres, on a les résolutions d'inéquations suivantes :

$$\begin{array}{l} a+x<b \\ x<b-a \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+a>b \\ x>b-a \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-a\leq b \\ x\leq b+a \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-a\geq b \\ x\geq b+a \end{array}$$

etc.

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{On\ suppose\ ici\ que\ a\ est\ un\ nombre\ positif} \\ ax>b & ax\leqslant b \\ x>\dfrac{b}{a} & ax\leqslant b \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{On\ suppose\ ici\ que\ a\ est\ un\ nombre\ négatif} \\ ax>b & ax\leqslant b \\ x<\dfrac{b}{a} & ax\geqslant b \end{array}$$

6/ Méthode générale

On admet les propriétés suivantes.

Propriétés

On ne change pas les solutions d'une inéquation lorsqu'on ajoute ou soustrait le même nombre dans chaque membre :

- Si $a>b$ alors $a+k>b+k$
- Si $a\leq b$ alors $a-k\leq b-k$

Exemples

$$\begin{aligned} x-3 &< -9 \\ x-3\mathbf{+3} &< -9\mathbf{+3} \\ x &< -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 2 \\ x+5\mathbf{-5} &\geq 2\mathbf{-5} \\ x &\geq 2-5 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Propriétés

On ne change pas les solutions d'une inéquation lorsqu'on multiplie ou divise par le même nombre positif dans chaque membre :

- Si $a>b$ alors $a\times\mathbf{k}\geqslant b\times\mathbf{k}$
- Si $a\leq b$ alors $\frac{a}{\mathbf{k}}\leq\frac{b}{\mathbf{k}}$

Exemples

$$\begin{aligned} 3x &\geq -2 \\ \frac{3x}{\mathbf{3}} &\geq \frac{-2}{\mathbf{3}} \\ x &\geq \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 &\geq 2x \\ \frac{-3}{\mathbf{2}} &\geq \frac{2x}{\mathbf{2}} \\ \frac{-3}{2} &\geq x \end{aligned}$$

Propriétés fondamentales des équations

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inéquation par une même nombre négatif, il faut changer le sens (pour changer l'ordre) afin d'obtenir les mêmes solutions :

- $Si \quad a>b \quad (k \ \ négatif)$ $alors \ \ a\times k<b\times k$
- $Si \quad a>b \quad (k \ \ négatif)$ $alors \quad \frac{a}{k}<\frac{b}{k}$

Exemples

$$\begin{gathered} 7-2x\leq -2 \\ 7-2x\mathbf{-7}\leq -2\mathbf{-7} \\ -2x\leq -9 \\ on\ change\ de\ sens\ à\ la\ prochaine\ étape \\ car\ on\ divise\ par\ un\ nombre\ négatif \\ \frac{-2x}{\mathbf{-2}}\geq\frac{-9}{\mathbf{-2}} \\ x\geq\frac{9}{2} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -8-5x>3 \\ -8-5x\mathbf{+8}>-3\mathbf{+8} \\ -5x>+5 \\ on\ change\ de\ sens\ à\ la\ prochaine\ étape \\ car\ on\ divise\ par\ un\ nombre\ négatif \\ \frac{-5x}{-5}<\frac{+5}{-5} \\ x<-1 \end{gathered}$$

7/ Exemples types

Exemple 1

- 1ère étape : $3x-7(3x+4)\leq 2(3-2x)+4$
  $3x-21x-28\leq 6-4x+4$
- 2ème étape : $-18x-28\leq 10-4x$
- 3ème étape : $-18x-28\mathbf{+28}\leq 10-4x\mathbf{+28}$
  $-18x\leq -4x+38$
- 4ème étape : $-18x\mathbf{+4x}\leq -4x+38\mathbf{+4x}$
  $14x\leq 38$
- 5ème étape : $\frac{14x}{\mathbf{14}}\leq\frac{38}{\mathbf{14}}$
  $\textit{on a pas eu besoin de changer l'ordre puisque 14 est positif}$
  $x\leq\frac{19}{7}$

- 1ère étape : on développe chaque membre.
- 2ème étape : on réduit chaque membre.
- 3ème étape : on fait en sorte de mettre les « nombres » entre eux puis on réduit.
- 4ème étape : on fait en sorte de mettre les « x » entre eux puis on réduit.
- 5ème étape : on isole x en divisant par le coefficient attaché à x, on donne le résultat sous le forme d'une fraction irréductible, voire sous la forme d'un entier.

Exemple 2

En suivant les mêmes étapes....

$$8-3(x-5)>-2x-(-5+x)+7x$$
$$8-3x+15>-2x+5-x+7x$$
$$-3x+23>4x+5$$
$$-3x+23\mathbf{-23}>4x+5\mathbf{-23}$$
$$-3x>4x-18$$
$$-3x\mathbf{-4x}>4x-18\mathbf{-4x}$$
$$-7x>-18$$
$$\textit{on change de sens à la prochaine étape car on divise par un nombre négatif}$$
$$\frac{-7x}{\mathbf{-7}}<\frac{-18}{\mathbf{-7}}$$
$$x<\frac{18}{7}$$

8/ Pour aller un peu plus vite...

C'est le même principe que pour les équations.

Propriété

Dans une inéquation, on peut changer un terme de membre sans modifier les solutions si on change son signe en son opposé.

Exemple type

$$-3(x-2)-6x>7-2\times(4x-2)$$
$$-3x+6-6x>7-8x+4$$
$$-9x+6>11-8x$$
$$\textit{dans l'étape suivante on change de membre les termes}$$
$$-8x\ \textit{et}\ +6\ \textit{mais en changeant leurs signes}$$
$$-9x\mathbf{+8}x>11\mathbf{-6}$$
$$-1x>5$$
$$\textit{on va changer le sens puisque}$$
$$\textit{le coefficient } -1 \textit{ est négatif}$$
$$x<\frac{5}{-1}$$
$$x<-5$$

9/ Mise en inéquation

On suivra les mêmes étapes que pour les mises en équations :

- choix de l'inconnue ;
- expression des données de l'énoncé en fonction de l'inconnue ;
- mise en équation ;
- résolution de l'équation ;
- conclusion.