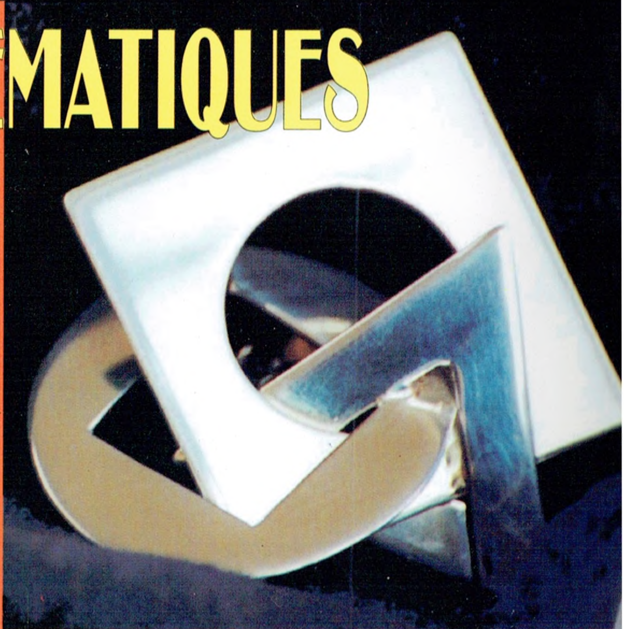
Vers le Bac

MATHEMATIQUES

4ème

CORRIGES



Section

Mathématiques

Tome 2

Géométries - Probabilités
Statistiques

BEN CHERIFA Ibrahim

AMARI Hedi

PREFACE

Cet ouvrage a été conçu pour être, durant toute l'année scolaire , un outil de travail complet pour les élèves des classes terminales section mathématiques.

Il se compose de neuf chapitres.
Chaque chapitre comporte :

- ⇨ *Un rappel de cours (Résultats à retenir).*
- ⇨ *Des exercices classés par difficulté croissante bien choisis.*
- ⇨ *Les Solutions détaillées de ces exercices*
- ⇨ *Des Problèmes.*

Cet ouvrage, qui est conforme au nouveau programme a pour but la préparation intensive au Baccalauréat.

Enfin , Nous tenons à remercier Mr Gafsia Salahedine qui a mis tant de soin à l'édition de cet ouvrage.

Les auteurs

AMARI Hédi & BEN CHERIFA Brahim

NOMBRES COMPLEXES

Résultats à retenir :

1°/ Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in R^2$ $\quad \bar{z} = x - iy$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

2°/ a) $\forall z \in C^* : z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $\alpha \in R$

$\arg z \equiv \alpha (2\pi)$

b) $|z| = r$; $\arg z \equiv \theta (2\pi) \Leftrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3°/ $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 (2\pi)$

$\arg(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 (2\pi)$ $\quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg z (2\pi)$

4°/ $\arg(z) \equiv 0(2\pi) \Leftrightarrow z \in R_+^*$

$\arg(z) \equiv 0(\pi) \Leftrightarrow z \in R^*$

5°/ a) Soit $\Re(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé

$M(x, y) \Leftrightarrow$ M d'affixe $z = x + iy = z_M$

b) $\vec{AB} = \alpha \vec{CD} + \beta \vec{EF} \Leftrightarrow z_B - z_A = \alpha(z_D - z_C) + \beta(z_F - z_E)$

c) $AB = \| \vec{AB} \| = | z_B - z_A |$ $\quad (\widehat{\vec{i}, \vec{OM}}) \equiv \arg z_M (2\pi)$

$(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)(2\pi)$

6°/ (E) : $z^2 = a + ib$ avec $(a, b) \in R^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + iy \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

ce système nous permet de trouver les solutions de (E).

7°/ $\mathbf{az^2 + bz + c = 0 \ (a \neq 0)}$; $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = d^2}$

$$\mathbf{z' = \frac{-b-d}{2a}; \quad z'' = \frac{-b+d}{2a}; \quad z'+z'' = \frac{-b}{a}; \quad z'z'' = \frac{c}{a}}$$

8°/ $\mathbf{z^n = a + ib = [\rho,\theta] \Leftrightarrow z = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]}$ où

$$\mathbf{k \in \{0, 1, 2, \cdots\cdots, (n-1)\} (n \geq 2)}$$

9°/Les points A, B, C, D non alignés sont cocycliques si :

$$\mathbf{\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right)(\pi)}$$

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 1$ et $Z = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$

1°/ Montrer que $|Z| = 1$

2°/ Monter que $\dfrac{Z-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

3°/ Etablir que $\dfrac{Z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur

4°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M d'affixes z tels que : $Z \in \mathbb{R}$ .Construire cet ensemble.

Exercice 2 :

Soit $Z = z^2 + z - \overline{z}$ ou $z \in \mathbb{C}$

1°/ Trouver les nombres complexes z tels que $Z = 2i$.

2°/Le plan est rapporté à une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $Z \in \mathbb{R}$.
b) $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = (1+i)\overline{z}$

1°/ Soit r le module de z. Exprimer en fonction de r le module de Z

2°/ Soit θ un argument de z. Exprimer en fonction de θ un argument de Z

3°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|Z| = 2$

4°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que le point N d'affixe Z soit situé sur la droite Δ: $2x + y + 4 = 0$.

5°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que $Z \in \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 4 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$,

Soit A d'affixe $2i$.

Soit φ est l'application de $\mathbf{P} \setminus \{A\} \rightarrow$ P et qui a tout point M d'affixe z associe le point z' d'affixe $z' = \dfrac{2iz-5}{z-2i}$

1°/ Montrer que M' $\neq$ A.

2°/ Exprimer z en fonction de z'.

3°/ Soit B , C les points d'affixes respectives –i et 5i. Montrer que B et C *sont* invariants par φ .

4°/ Montrer que si M appartient à la droite (BC) privée de A alors son image M' par φ , appartient à (BC).

5°/a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$ on a : $|z'-2i| \cdot |z-2i| = 9$

b) En déduire que pour tout point M appartenant au cercle Γ de centre A et de rayon 3. le point M' appartient à P.

Exercice 5 :

Soit a, b et c trois complexes non nuls de même module et vérifiant $a+b+c = 0$.

A - 1°/ On pose $p = \dfrac{a}{c}$ et $q = \dfrac{b}{c}$

a) Prouver que $|p| = |q| = 1$

b) Prouver que : $p + q = -1$

2°/ En déduire que $p = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $p = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B - Soit A d'affixe a , B d'affixe b , C d'affixe c

1°/ Prouver que O est le centre de gravité du triangle ABC.

2°/ Prouver que A, B, C appartiennent à un même cercle de centre O.

Exercice 6 :

Soit a, b, c trois complexes non nuls et de même module.

1°/ On pose $W = \overline{b}c - b\overline{c}$.

Prouver que W est un nombre imaginaire pur.

2°/ On pose $t = \dfrac{b+c}{b-c}$. Prouver que t est un imaginaire pur

3°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ H d'affixe $a+b+c$

a) Prouver que $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}}) \equiv \arg(t)\ [2\pi]$

b) En déduire que $(CB) \perp (AH)$.

Exercice 7 :

Ecrire sous la forme trigonométrique le complexe z dans chacun des cas suivants :

1°/ $z = (-1+i)$;

2°/ $z = \dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$;

3°/ $z = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1+i}\right)^n$, où $n \in \mathbf{N}^*$;

4°/ $z = 1 + i + (1-i)\,\mathrm{tg}\,\theta$ avec $\theta \in \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$;

5°/ $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$ avec $\varphi \in \,]\,0, 2\pi\,[\ \setminus \{\pi\}$.

6°/ $z = \cos\alpha + i(1 + \sin\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \pi[$.

Exercice 8 :

Soit z_1 et z_2 deux complexes de module 1 .Soit $Z = \dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$.

1°/ *Montrer que Z est un réel positif*.

2°/ Soient deux points A et B d'affixes respectives a et b où a et b sont 2 complexes non nuls , dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Calculer en fonction de a et b l'affixe z_I du point I barycentre des points A et B affectés respectivement aux coefficients $|b|$ et $|a|$.

Exercice 9 :

1°/ Soit φ un réel de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et z le nombre complexe défini par : $z = \frac{1}{2}(\sin\varphi + i(1-\cos\varphi))$

Déterminer en fonction de φ, le module et un argument de z.

2°/ Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$ où z étant le nombre complexe donné au 1°/.

3°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points M et N d'affixes respectives $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$.

Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$. Représenter ces ensembles.

Exercice 10 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\arg(z - i\bar{z} + 1) \equiv \frac{\pi}{4}\,(\pi)$.

2°/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\frac{z+2i}{(1+i)z-1}$ soit un réel strictement positif.

3°/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $(z+3i)^3$ soit un réel.

Exercice 11 :

Soit a un complexe non nul.

On pose $a = [r, \theta]$. $0 \le \theta \le 2\pi$

Déterminer suivant les différentes valeurs de θ la forme trigonométrique des complexes : $b = a + i\overline{a}$ et $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{a}$

Exercice 12 :

1°/ Montrer que : $1 + e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

2°/ Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{n\alpha}{2}}$.

3°/En déduire $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\alpha k)$ et $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(\alpha k)$

Exercice 13 :

1°/ Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \dfrac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$

2°/ En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \text{cotg}(\frac{\pi}{2n})$

3°/ Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$. Prouver que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

Exercice 14 :

1°/ On pose $Z = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}$ où $0 < \alpha < \pi$ et $0 < \beta < \pi$

Prouver que Z est un nombre imaginaire pur.

2°/ on pose $W = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$ où $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

Prouver que $W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\text{tg}(\frac{\theta}{2})$

3°/ Le plan P est rapporté orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit A d'affixe $e^{i\alpha}$,

B d'affixe $e^{i\alpha}$ et C d'affixe $-e^{i\beta}$, supposé distinct .

a) Prouver que ABC est un triangle rectangle en A

b) Trouver une relation entre α et β pour que ABC soit isocèle .

Exercice 15 :

Soit z un complexe $\neq 0$; $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé .

A d'affixe z ; B d'affixe $\overline{z}$ et C d'affie $\dfrac{z^2}{z}$

1°/ prouver que A , B et C appartiennent à un même cercle de centre O

2°/prouver que ABC est un triangle isocèle de sommet principal A.

3°/ on suppose que la partie réel de z est positive . Prouver que :

$(\widehat{\overrightarrow{CB}\ ,\ \overrightarrow{CA}}) \equiv \arg(z)\,(2\pi)$

4°/ soit $f : \begin{cases} p \setminus \{0\} \longrightarrow P \\ M(z) \longrightarrow M'(z') / z' = \overline{z} + \dfrac{z^2}{z} \end{cases}$

a) on pose $z = r\ e^{i\theta}$ $(r > 0)$. Prouver que $z' = 2r\cos(2\theta).e^{i\theta}$

b) prouver que : $\overrightarrow{OM'} = 2\cos(2\theta).\ \overrightarrow{OM}$. Que peut –on conclure sur O , M et M' ?

c) trouver et construire l'ensemble (E) des points M(z) tel que z' = z .

Exercice 16 :

Linéariser : 1°/ $\cos^3 x \cdot \sin 2x$

2°/ $\cos^2 2x \cdot \sin 3x$

3°/ $\cos^4 x \cdot \sin x$

Exercice 17 :

Soit dans l'ensemble **C** des nombres complexes :

(E) : $2z^2+(\sqrt{3}-3i)z-4=0$

1°/ Résoudre dans **C** l'équation (E).

2°/ On note z_1 et z_2 les deux solutions (z_1 étant la racine de module 1).

a) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) On considère dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ les deux points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

Donner une construction géométriques des points M_1 et M_2.

Exercice 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$. Soit ω un nombre complexe d'argument θ tel que $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et de partie imaginaire $tg\theta$.

1°/a) Ecrire la forme trigonométrique de ω.

b) En déduire la forme algébrique de ω.

2°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$2z^2-(1+i\sqrt{3})z-1+i\sqrt{3}=0$

On appelle z_1 la solution réelle; z_2 l'autre solution.

3°/ On considère les points A, B et C d'affixes respectives : z_1 ; z_2 et ω.

a) Déterminer θ pour que $CA = CB$.

b) Montrer que dans ce cas le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 19 :

Soit a un paramètre complexe non nul.

1°/ Résoudre dans **C** l'équation à inconnu z :

$z^2-a(1+i)z+ia^2=0$ On note z_1 et z_2 les deux solutions.

2°/ On pose $a=\rho e^{i\theta}$ où $\rho>0$ et $\theta\in\mathbf{R}$.

a) Mettre les solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Prouver que $z_1^{2n}+z_2^{2n}=a^{2n}(1+(-1)^n)$

3°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$. On donne A et B deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Prouver que OAB est un triangle isocèle rectangle.

Exercice 20 :

1°/ Montrer que : $1+e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$1-e^{i\alpha} = -2i\sin(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

2°/ Résoudre dans $\mathbf{C}$:

a) $z^{2n}+z^n+1=0$ où $n \in \mathbf{N}^*$

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0$ (on pourra utiliser le 1°/ pour donner une écriture simple des solutions).

Exercice 21 :

Soit t un réel de l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\Re(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé de P.

1°/ a) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation d'inconnu z

(E_t) : $z^2-2(1+\cos 2t)z+2(1+\cos 2t)=0$ (on notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution).

b) Mettre z_1 sous forme trigonométrique.

2°/ soit A, M et M_1 les points d'affixes respectives 1, $1+e^{it}$ et z_1.

a) Ecrire en fonction de t les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{AM}$.

b) En déduire une relation entre $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Que peut-on conclure sur les droites (OM_1) et (AM)?

Exercice 22 :

Pour tout nombre complexe z on pose

$$f(z)=z^3+2(-\sqrt{3}+i)z^2+4(1-i\sqrt{3})z+8i$$

1°/ a) Montrer que l'équation $f(z)=0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre alors l'équation $f(z)=0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, z_1 étant celle qui a une partie imaginaire négative.

2°/ On pose $w = \dfrac{z_1}{z_0}$

a) Donner la forme trigonométrique de w

b) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, wz et w^2z.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

Exercice 23 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1°/ Soit dans $\mathcal{P}$ les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives les complexes z_1, z_2 et z_3. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral si et seulement si $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ou $z_1 + j^2z_2 + jz_3 = 0$

2°/ Soit dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation

$(E) : z^3 - (1+a+ia)z^2 + a(1+i+ia)z - ia^2 = 0$

a désigne un paramètre complexe.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Calculer les deux autres solutions z' et z'' de (E).

c) Soit dans $\mathcal{P}$ les points A, B et C d'affixes respectives $1, z'$ et z''.

Déterminer les différentes valeurs du complexe a de manière que le triangle ABC soit équilatéral (on pourra utiliser la question 1°/).

Exercice 24 :

On considère dans l'ensemble des nombre complexes l'équation :

(E) : $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$

où m est un paramètre réel .

1°/a) Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera .

b) Calculer en fonction de m les deux autres racines .

2°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M' et M'' d'affixes respectives 2i , -2-2i , -1-im et -1+im .

a) Montrer que AM'BM'' est un parallélogramme .

b) Déterminer m pour que AM'BM'' soit un rectangle .

Exercice 25 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les poins A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit f l'application de P \{B} dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-a}{z-1}$

1°) Montrer que les affixes des points invariants par f sont solutions de l'équation E : $z^2 - 2z + a = 0$.

2°) a) On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation E

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3°) Dans cette question on suppose que a = -1.

Soit M un point de P \{B} d'affixe z et M' le point d'affixe z' = f(z).

a) Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}) \equiv 0 \quad [2\pi]$.

En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de

l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé de B.

Exercice 26 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et A le point d'affixe 2.

1°/ Vérifier que Δ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $4 - z - \bar{z} = 0$.

2°/ Soit φ l'application de $P \setminus \Delta$ dans P, qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}$.

a) Montrer que z' est un nombre réel.

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $z' = k$ où k est un réel donné différent de 2.

3°/a) Montrer que pou tout nombre complexe z dont la partie réelle est différente de 2, on a : $|z' - z| = |z' - 2|$.

b) En déduire que pour tout point M de $P \setminus \Delta$, le point M' est l'intersection de la médiatrice de [AM] avec l'axe des abscisses.

4°/ Soit D la droite d'équation $x = 3$.

Pour tout point M de D, on désigne par M' le point φ(M) et par M'' le symétrique de M' par rapport à (AM).

Montrer que MM'' = d(M'',D)

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ $|Z| = \dfrac{|z-1|}{|1-\overline{z}|} = \dfrac{|z-1|}{|1-\overline{z}|}$; or $|1-\overline{z}| = |\overline{1-\overline{z}}| = |1-z| = |z-1|$

d'où : $|Z| = \dfrac{|z-1|}{|z-1|} = 1.$

2°/ $\dfrac{Z-1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}-1}{z-1} = \dfrac{z+\overline{z}-2}{(z-1)(1-\overline{z})} = \dfrac{z+\overline{z}-2}{(z+\overline{z}-1-z\overline{z})}$

or : $z+\overline{z} = 2\ \Re é\, z \Rightarrow z+\overline{z} \in \mathbb{R}$ et $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0 \in \mathbb{R}$

et par suite $\dfrac{Z-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

3°/ $\dfrac{Z-1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}+1}{z-1} = \dfrac{z-\overline{z}}{(z-1)(1-\overline{z})} = \dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}-1-|z|^2}$

or : $z-\overline{z} = i\ \ 2\,\mathrm{Im}\,(z)$ donc $z-\overline{z} \in i\mathbb{R}$ et $z+\overline{z}-1-|z|^2 \in \mathbb{R}^*$

d'où $\dfrac{Z-1}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur.

4°/ $Z = \dfrac{z-1}{(1-\overline{z})} = \dfrac{(z-1)(1-z)}{|1-z|^2}$ (car $|1-z^2| = (1-\overline{z}).(1-z)$)

On pose $z = x + iy \Rightarrow 2z - z^2 - 1 = 2(x + yi) - (x + yi)^2 - 1$

$= -x^2 + y^2 + 2x - 1 + i(2y - 2xy)$

$Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(Z) = 0 \\ \text{avec}\, z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2xy = 0 \\ (x, y) \neq (1,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = 1 \\ (x, y) \neq (1,0) \end{cases}$$

L'ensemble est la réunion des deux droites D_1 : x = 1 et D_2 : y = 0 privé du point A (1,0)

Solution 2 :

1°/ Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$Z = z^2 + z - \bar{z} = (x + yi)^2 + x + yi - (x - yi) = x^2 - y^2 + i(2xy + 2y)$

$= x^2 - y^2 + i2y(x + 1)$

$$Z = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ et \\ 2y(x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ ou } x = -y \\ et \\ y(x+1) = 1 \end{cases}$$

• 1er cas : $\begin{cases} x = y \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x+1) = 1 \end{cases}$

* $x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$; $\Delta = 5$;

$$x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

D'où $z = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(1 + i)$ ou $z = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(1 + i)$

• 2ème cas : $\begin{cases} x = -y \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x(x+1) = 1 \end{cases}$

* $-x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$;

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ impossible car $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : les complexes z sont : $-(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})(1+i)$ ou $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$

2°/

a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -1$

D'où l'ensemble (E_1) est la réunion des deux droites $D_1 : y = 0$ et $D_2 : x = -1$; $E_1 = D_1 \cup D_2$

b) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Re é(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Soit $\Delta_1 : x - y = 0$ et $\Delta_2 : x + y = 0$. D'où l'ensemble

$(E_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Solution 3 :

1°/ $|Z| = |(1+i)\bar{z}| = |1+i|\cdot|\bar{z}| = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\,r$ donc $|Z| = \sqrt{2}\,r$.

2°/ Soit α un argument de Z.

<u>1è Méthode</u>

$Z = |Z|e^{i\alpha} = r\sqrt{2}\,e^{i\alpha}$

Or $Z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}r\,e^{-i\theta} = |Z|e^{i(-\theta+\frac{\pi}{4})}$ car $(1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}})$

$\Rightarrow \alpha \equiv \dfrac{\pi}{4} - \theta \ (2\pi)$.

<u>2è Méthode</u>

$\arg Z \equiv \arg[(1+i)\bar{z}] \ (2\pi) \equiv \arg(1+i) + \arg(\bar{z}) \ (2\pi)$

$\equiv \dfrac{\pi}{4} - \theta \ (2\pi)$

3°/ Soit $E = \{M(z) \in \mathcal{P} \,/\, |Z| = 2\}$

$|Z| = 2 \Leftrightarrow r\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$

Donc $E = \{M(z) \in \mathcal{P} \,/\, |z| = \sqrt{2}\} = \{M \in \mathcal{P} \,/\, OM = \sqrt{2}\}$

Conclusion : E est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

4°/ Soit $F = \{M(z) \,/\, N(z) \in \Delta : 2x + y + 4 = 0\}$

Traitons cette question analytiquement :

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

D'où $Z = (1+i)(x - iy) = x + y + i(x - y)$ ainsi $N(x+y, x-y)$

$N \in \Delta \Leftrightarrow 2(x+y) + x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 4 = 0$

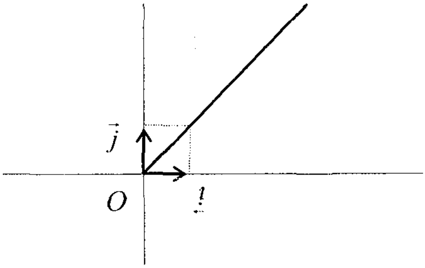
Conclusion : L'ensemble F est la droite Δ' d'équation $3x + y + 4 = 0$.

5°/ Soit $H = \{M(z) \,/\, Z \in \mathbf{R}_+^*\}$

<u>1è Methode</u>

$$Z \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow x + y + i(x - y) \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x > 0 \end{cases}$$

Conclusion : H est la demi droite d'origine O, de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ située dans le demi-plan : $y > 0$ privé de O.



2è Méthode

$Z \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg\left[(1+i)\bar{z}\right] \equiv 0\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} - \arg z \equiv 0\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg z \equiv \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

M décrit la demi-droite d'origine O, de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, située dans le demi-plan $y > 0$ privé de O.

Remarque : étant donné $\alpha \in \mathbf{R}$, l'ensemble des points M du plan tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{WM}}) \equiv \alpha\ (2\pi)$ est une demi-droite d'origine W, de vecteur directeur $\vec{u} = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}$ privé du point W.

Solution 4 :

1°/ Si M' = A $\Leftrightarrow$ z' = 2i $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2iz-5}{z-2i} = 2i \Leftrightarrow 2iz - 5 = 2iz + 4$

$\Rightarrow$ -5 = 4 ce qui est absurde. Donc M' $\neq$ A.

2°/ $z' = \dfrac{2iz-5}{z-2i} \Leftrightarrow zz' - 2iz' = 2iz - 5 \Leftrightarrow z(z'-2i) = 2iz' - 5$

or z' $\neq$ 2i (d'après 1°/) d'où $z = \dfrac{2iz'-5}{z'-2i}$

3°/ • Soit $B' = \varphi(B)$

On a : $z_{B'} = \dfrac{2iz_B - 5}{z_B - 2i} = \dfrac{2i(-i) - 5}{-i - 2i} = -i$

d'où $B' = B$ et par suite B est un point invariant par φ

• Soit $C' = \varphi(C)$

On a : $z_{C'} = \dfrac{2iz_C - 5}{z_C} = \dfrac{2i(5i) - 5}{5i - 2i} = \dfrac{-15}{3i} = 5i$

d'où $C' = C$ et par suite C est un point invariant par φ

4°/ $M \in (BC) \Rightarrow M \in (O, \vec{j})$ d'où $z_M = yi$ où $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$z_{M'} = \frac{2iz_M - 5}{z_M - 2i} = \frac{2i(yi) - 5}{yi - 2i} = \frac{-2y - 5}{(y-2)i} = \frac{(2y+5)}{y-2} i = \lambda i \text{ où } \lambda = \frac{2y+5}{y-2}$$

d'où $z_{M'}$ est imaginaire et par suite $M' \in (O, \vec{j})$

conclusion : $M' \in (BC)$.

5)a) $|z' - 2i| \cdot |z - 2i| = \left|(\dfrac{2iz - 5}{z - 2i} - 2i)(z - 2i)\right| = |(-5 - 4)| = 9$

b) $M \in \Gamma \Leftrightarrow M \in C(A, 3) \Leftrightarrow AM = 3 \Leftrightarrow |z - 2i| = 3$

Or $|z' - 2i| . |z - 2i| = 9 \Rightarrow |z' - 2i| = 3 \Rightarrow AM' = 3 \Rightarrow M' \in \Gamma$.

Solution 5 :

A - 1°/ a) * $|p| = \left|\dfrac{a}{c}\right| = \dfrac{|a|}{|c|}$ or $|a| = |c|$ d'où $|p| = 1$

* $|q| = \left|\dfrac{b}{c}\right| = \dfrac{|b|}{|c|}$ or $|b| = |c|$ d'où $|q| = 1$

Conclusion : $|p| = |q| = 1$

b) $p+q=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ or $a+b+c=0$ d'où $a+b=-c$ et par suite $p+q=\dfrac{-c}{c}=-1$

2°/ Soit $p=x+yi$

On a : $|p|=1 \Leftrightarrow |x+yi|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

On a : $|q|=1$ or $q=-1-p$ (d'après 1°/ b))

donc $|-1-p|=1 \Leftrightarrow |1+p|=1 \Leftrightarrow |1+x+yi|=1 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2=1$

On a : $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (1+x)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-x^2 & (1) \\ (1+x)^2+1-x^2=1 & (2) \end{cases}$

(2) : $\Leftrightarrow 1+2x+x^2+1-x^2=1 \Leftrightarrow 2x=-1$ d'où $x=-\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y^2=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ d'où $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Conclusion : $p=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $p=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B - 1°/ Pour montrer que O est le centre de gravité du triangle ABC, il suffit de prouver que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ c'est à dire $(z_A-z_O)+(z_B-z_O)+(z_C-z_O)=a+b+c=0$ (d'après les données) d'où O est le centre de gravité de ABC.

2°/ $OA=|z_A-z_O|=|a|$

$OB=|z_B-z_O|=|b|=|a|$

$OC=|z_C-z_O|=|c|=|a|$

On a : $OA=OB=OC$ donc A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

Solution 6 :

1°/ $\overline{W}=b\overline{c}-\overline{b}c=-W$ donc W est un nombre imaginaire pur.

2°/ $t=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c)(\overline{b}-\overline{c})}$ Or $(b-c)(\overline{b}-\overline{c})=(b-c)(\overline{b-c})=|b-c|^2$

$(b+c)(\overline{b}-\overline{c})=b\overline{b}-b\overline{c}+\overline{b}c-c\overline{c}=|b|^2+W-|c|^2$ or $|b|=|c|$ donc

$(b+c)(\overline{b}-\overline{c})=W$ et par suite $t=\dfrac{W}{|b-c|^2}$ d'où t est un nombre imaginaire pur.

3°/ $(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AH}) \equiv (\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\vec{i}) + (\vec{i}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AH})\ (2\pi)$

$\equiv -\arg(z_B - z_C) + \arg(z_H - z_A)\ (2\pi) \equiv \arg(\dfrac{z_H - z_A}{z_B - z_C})\ (2\pi)$

$\equiv \arg(\dfrac{b+c}{b-c})\ (2\pi)$ Or $\dfrac{b+c}{b-c} = t$ d'où $(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AH}) \equiv \arg t\ (2\pi)$

b) t étant un nombre imaginaire pur donc $\arg t \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

ou $\arg t \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ d'où $(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AH}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou

$(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AH}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Conclusion : $(CB) \perp (AH)$

Solution 7 :

1°/ $|-1+i| = \sqrt{2}$; on a : $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\alpha \equiv \dfrac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ d'où $z = \sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

2°/ $z = \dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$

$z = \dfrac{[1,\alpha]}{[1,-\alpha]} = [1,2\alpha]$ d'où $z = 1\cdot(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))$.

3°/ Soit $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i} = \dfrac{[2,\frac{-\pi}{6}]}{[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]} = [\sqrt{2},-\dfrac{5\pi}{12}]$

d'où $z_0 = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{5\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{12}))$

or $z = z_0{}^n$ d'où $z = \sqrt{2}^n\left[\cos\dfrac{-5\pi n}{12} + i\sin\dfrac{-5\pi n}{12}\right]$

4°/ $z = 1 + i + (1-i)\mathrm{tg}\theta = 1 + i + \dfrac{(1-i)\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{(1+i)\cos\theta + (1-i)\sin\theta}{\cos\theta}$

$z = \dfrac{\cos\theta + i\cos\theta + \sin\theta - i\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{(\cos\theta - i\sin\theta) + (i\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta}$

$$z=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)+i(\cos\theta-i\sin\theta)}{\cos\theta}=\frac{(1+i)(\cos\theta-i\sin\theta)}{\cos\theta}$$

or $1+i=[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]$ et $\cos\theta-i\sin\theta=[1,-\theta]$

$\Rightarrow(1+i)(\cos\theta-i\sin\theta)=[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}-\theta]$

or $\cos\theta>0$ car $\theta\in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ d'où $z=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}(\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{4}-\theta))$.

5°/ $z=1+\cos\varphi+i\sin\varphi=1+2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1+i\cdot2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$=2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$

φ	0		π		2π
$\cos(\frac{\varphi}{2})$		$+$	0	$-$	

- Si $\varphi\in]0,\pi[$ alors $z=2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$

- Si $\varphi\in]\pi,2\pi[$ alors $z=-2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi))$

6°/ $z=\cos\alpha+i(1+\sin\alpha)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+i$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2})+i(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{2})$

or $\cos X+\cos Y=2\cos(\frac{X+Y}{2})\cos(\frac{X-Y}{2})$

$\sin X+\sin Y=2\sin(\frac{X+Y}{2})\cos(\frac{X-Y}{2})$

$\Rightarrow z=2\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})+2i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})$

$=2\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})\left[\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})\right]$

<u>signe de :</u> $\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})$ pour $\alpha\in]0,\pi[$:

$0<\alpha<\pi\Rightarrow0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{-\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})>0$

d'où $z=2\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})(\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}))$

Solution 8 :

1°/ $Z = \dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2} = \dfrac{z_1^2+z_2^2+2z_1z_2}{z_1z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}+2$

or $z_1 = [1,\alpha]$ et $z_2 = [1,\beta]$

d'où $\dfrac{z_1}{z_2} = [1,\alpha-\beta]$ et $\dfrac{z_2}{z_1} = [1,\beta-\alpha]$

$\Rightarrow Z = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\alpha) + i\sin(\beta-\alpha) + 2$

$= 2\cos(\alpha-\beta) + 2$ (car $\cos(-X) = \cos X$ et $\sin(-X) = -\sin X$)

$\Rightarrow Z = 2(\cos(\alpha-\beta)+1) \in \mathbb{R}_+$ car $-1 \le \cos(\alpha-\beta) \le 1$.

2°/ $|b|\overrightarrow{AI} + |a|\overrightarrow{BI} = \vec{0} \Leftrightarrow |b|(z_I - z_A) + |a|(z_I - z_B) = 0$

$\Leftrightarrow z_I = \dfrac{a|b|+b|a|}{|a|+|b|}$.

Solution 9 :

1°/ $z = \dfrac{1}{2}(\sin\varphi + i2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}) = \sin\dfrac{\varphi}{2}(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2})$

$\sin\dfrac{\varphi}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\varphi}{2} = k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$

φ	$-\pi$		0		π
$\sin\dfrac{\varphi}{2}$		$-$	0	$+$	

si $\varphi \in [-\pi, 0[$ on a : $z = \left[-\sin\dfrac{\varphi}{2} \; ; \dfrac{\varphi}{2}+\pi\right]$

si $\varphi = 0$ on a : $z = 0$

si $\varphi \in]0, \pi]$ on a : $z = \left[\sin\dfrac{\varphi}{2} \; ; \dfrac{\varphi}{2}\right]$

2°/ * $z-i=\frac{1}{2}\left[\sin\varphi+i(1-\cos\varphi)\right]-i$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\varphi-i(1+\cos\varphi)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\varphi-i2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2})=-i\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$$

$\forall\,\varphi\in\left]0,\pi\right[$ on a : $\frac{\varphi}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\cos\frac{\varphi}{2}>0$

d'où $z-i=\left[1,-\frac{\pi}{2}\right]\cdot\left[\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}\right]=\left[\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi-\pi}{2}\right]$

* $\dfrac{z}{z-i}=\dfrac{\left[\sin\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}\right]}{\left[\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}=\left[\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

3°/ M d'affixe $z-i$ d'où M de coordonnées x et y tels que :

$$\begin{cases} x=\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\frac{\varphi-\pi}{2})=\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\sin\varphi \\ y=-\frac{(1+\cos\varphi)}{2} \end{cases}$$

$\sin\varphi=2x$ et $\cos\varphi=-1-2y$

comme $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\Leftrightarrow 4x^2+4(y+\frac{1}{2})^2=1\ \Leftrightarrow x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

d'où M appartient au cercle de centre $\omega(0,-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Or $\forall\,\varphi\in\left]0,\pi\right[$ on a : $0<x\le\frac{1}{2}$ et $-1<y<0$

M décrit le cercle $C(\omega,\frac{1}{2})\cap\mathcal{P}^{(+)}$ où $\mathcal{P}^{(+)}$ est le demi-plan d'équation $x>0$.

N d'affixe $\dfrac{z}{z-i}$ or $\dfrac{z}{z-i}=\left[\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]=i\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$

N de coordonnées $(0,\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2})$ or φ décrit $]0,\pi[$ d'où $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ décrit l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$

d'où N décrit la demi-droite $[oy)$ privée de o d'équation : $\begin{cases} x=0 \\ y>0 \end{cases}$

Solution 10 :

1°/ Soit $E=\left\{M(z)\in\mathcal{P}\,/\arg(z-i\overline{z}+1)\equiv\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$

$\arg(z-i\overline{z}+1)\equiv\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in\mathbf{R}^*$ tel que :

$z-i\overline{z}+1=\alpha\, e^{i\frac{\pi}{4}}=\alpha\sqrt{2}(1+i)$ posons $\alpha\sqrt{2}=\beta$

donc $\arg(z-i\overline{z}+1)\equiv\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow$ il existe $\beta\in\mathbf{R}^*/\,z-i\overline{z}+1=\beta+\beta\, i$

Posons $(z=x+iy)$

$x-y+1+i(y-x)=\beta+\beta\, i \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=\beta \\ y-x=\beta \qquad (\beta\in\mathbf{R}^*) \end{cases}$

$x-y+1=y-x \Leftrightarrow 2x-2y+1=0$ c'est une équation cartésienne d'une droite.

Conclusion : L'ensemble E est la droite dont une équation cartésienne est : $2x-2y+1=0$.

2°/ Soit $F=\left\{M(z)\in\mathcal{P}\,/\dfrac{z+2i}{(1+i)z-1}\in\mathbf{R}_+^*\right\}$

$$\frac{z+2i}{(1+i)z-1}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{z+2i}{z-\frac{1}{1+i}}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{z+2i}{z-\frac{1-i}{2}}$$

$$\frac{z+2i}{(1+i)z-1}\in\mathbf{R}_+^*\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z+2i}{(1+i)z-1}\right)\equiv 0\ (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow\arg(\frac{1}{1+i}\cdot\frac{z+2i}{z-\frac{1-i}{2}})\equiv 0\ (2\pi)\ \Leftrightarrow\arg(\frac{z+2i}{z-\frac{1-i}{2}})-\arg(1+i)\equiv 0\ (2\pi)$$

$$\arg(\frac{z+2i}{z-\frac{1-i}{2}})\equiv\arg(1+i)\ (2\pi)\Leftrightarrow\arg(\frac{z+2i}{z-\frac{1-i}{2}})\equiv\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$$

Soit le point A d'affixe $-2i$ et B le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$

$$\arg(\frac{z+2i}{z-\frac{1-i}{2}})\equiv\frac{\pi}{4}\ (2\pi)\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})\equiv\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$$

Conclusion : l'ensemble F est l'arc $[AB]$ privé de A et B, du cercle tangent à la demi-droite $[Bt)$, situé dans le demi-plan de frontière $[AB]$ ne contenant pas $[Bt)$ où $[Bt)$ est la demi droite telle que

$$(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{Bt}},\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}})\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$$

$$3°/\ (z+3i)^3\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\begin{cases}z+3i=0\\ ou\\ \arg(z+3i)^3\equiv 0\ (\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-3i\\ ou\\ 3\arg(z+3i)\equiv 0\ (\pi)\end{cases}$$

$$3\arg(z+3i)\equiv 0\ (\pi)\Leftrightarrow 3\arg(z+3i)=k\pi\quad\text{où}\quad k\in\mathbf{Z}$$

$$\arg(z+3i)=\frac{k\pi}{3}$$

* Si $k=3p$: $\arg(z+3i)=p\pi\Leftrightarrow\arg(z+3i)\equiv 0\ (\pi)$

$$\Leftrightarrow(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{AM}})\equiv 0\ (\pi)\ \text{ où }\ A(-3i)\ \Leftrightarrow M\in D(A,\vec{i})\setminus\{A\}$$

* Si $k = 3p+1$: $\arg(z+3i) = \dfrac{(3p+1)\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z+3i) = p\pi + \dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg(z+3i) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ (\pi) \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tq : $z+3i = \alpha\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

Posons $z = x+iy \Rightarrow x+iy+3i = \dfrac{\alpha}{2} + i\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ $\quad \alpha \in \mathbf{R}^*$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = -3 + \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}^*$$

d'où $M \in \Delta$: $\quad y = -3 + \sqrt{3}\,x$ privé du point $A(0,-3)$

* Si $k = 3p+2$

$\arg(z+3i) = (3p+2)\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z+3i) = p\pi + \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

il existe $\alpha \in \mathbf{R}^* / z+3i = \alpha\, e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\alpha}{2} & \alpha \in \mathbf{R}^* \\ y = -3 + \alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

d'où $M \in \Delta' : y = -3 - x\sqrt{3}$ privé du point $A(0,-3)$

Conclusion : L'ensemble demandé est $D \cup \Delta \cup \Delta'$ où

$D : y = -3$; $\Delta : y = -3 + \sqrt{3}x$; $\Delta' : y = -3 - x\sqrt{3}$

Solution 11 :

$a = [r, \theta] = r\,e^{i\theta}$

* $b = a + i\bar{a} = r\,e^{i\theta} + ir\,e^{-i\theta} = r(e^{i\theta} + i\,e^{-i\theta})$ or $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + i\,e^{-i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta + i(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= (\cos\theta + \sin\theta) + i(\cos\theta + \sin\theta) \\ &= \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)\,e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$b=\sqrt{2}r(\cos\theta+\sin\theta)e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$

d'où $b=2r\cos(\theta-\frac{\pi}{4})e^{i\frac{\pi}{4}}$

- Signe de $\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$:

$\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow \theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$

$\theta=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ or $0\le\theta\le 2\pi$ d'où $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ou $\theta=\frac{7\pi}{4}$

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$		+	0	-	0	+	

si $\theta\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ on a : $b=\left[2r\cos(\theta-\frac{\pi}{4}),\frac{\pi}{4}\right]$

si $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ou $\theta=\frac{7\pi}{4}$: $b=0$

si $\theta\in\left]\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right[$: $b=\left[-2r\cos(\theta-\frac{\pi}{4}),\frac{5\pi}{4}\right]$

* $c=a+e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{a}$

$c=re^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}re^{-i\theta}=r(e^{i\theta}+e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)})$

$c=re^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}+e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})})=re^{i\frac{\pi}{6}}(2\cos(\theta-\frac{\pi}{6}))$

$c=2r\cos(\theta-\frac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$

- Signe de $\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$

$\cos(\theta-\frac{\pi}{6})=0 \Leftrightarrow \theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$		+	0	-	0	+	

si $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{5\pi}{3}$ alors $c=0$

si $\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ alors $c=\left[2r\cos(\theta-\frac{\pi}{6}),\frac{\pi}{6}\right]$

si $\theta\in\left]\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[$ alors $c=\left[-2r\cos(\theta-\frac{\pi}{6}),\frac{7\pi}{6}\right]$

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$		+	0	-	0	+	

si $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{5\pi}{3}$ alors $c=0$

si $\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ alors $c=\left[2r\cos(\theta-\frac{\pi}{6}),\frac{\pi}{6}\right]$

si $\theta\in\left]\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[$ alors $c=\left[-2r\cos(\theta-\frac{\pi}{6}),\frac{7\pi}{6}\right]$

Solution 12 :

1°/ $1+e^{i\alpha}=e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}}=e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}})=2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$

Conclusion : $\forall\alpha\in\mathbf{R}$; $1+e^{i\alpha}=2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$

2°/ On a : $\forall z\in\mathbf{C},\forall z'\in\mathbf{C}$: $\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k z'^{n-k}=(z+z')^n$

On pose $z=e^{i\alpha}$ et $z'=1$ d'où : $\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{i\alpha k}=(1+e^{i\alpha})^n$

Or on a montré que $1+e^{i\alpha}=2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$

d'où $\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$

3°/ On a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\alpha k) + i \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(\alpha k)$$

$$= 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{n\alpha}{2}) + i 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{n\alpha}{2})$$

d'où : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\alpha k) = 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{n\alpha}{2})$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(\alpha k) = 2^n \cos^n(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{n\alpha}{2})$$

Solution 13 :

1°/ On sait que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$;

$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ donc pour $z = e^{i\frac{\pi}{n}} \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^k = \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-\cos\pi}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$; $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$

2°/ On a : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$

* $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{k\pi}{n}) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \Im_m(\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}})$

* $\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}})} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(-2i\sin(\frac{\pi}{2n}))}$

$$= \frac{i\,e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = \frac{i(\cos(\frac{\pi}{2n}) - i\sin(\frac{\pi}{2n}))}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = 1 + i\frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = 1 + i\text{cotg}(\frac{\pi}{2n})$$

Conclusion : $\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \text{cotg}(\frac{\pi}{2n})$

3°/ $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n})$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\text{cotg}(\frac{\pi}{2n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}t)}{\sin(\frac{\pi}{2}t)}\cdot t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}t)}{\frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{t}} = \frac{2}{\pi} \quad \text{car} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin at}{t} = a$$

Solution 14 :

1°/ $\overline{Z} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{-i\alpha} + e^{-i\beta}} = \frac{\frac{1}{e^{i\alpha}} - \frac{1}{e^{i\beta}}}{\frac{1}{e^{i\alpha}} + \frac{1}{e^{i\beta}}}$

$$\overline{Z} = \frac{e^{-i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}.e^{-i\beta}}\cdot\frac{e^{i\alpha}.e^{i\beta}}{e^{i\beta} + e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} + e^{i\alpha}} = -Z$$

On a : $\overline{Z} = -Z$ donc Z est un nombre imaginaire pur .

2°/ soit W = $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$

On a : $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

D'où W = $\frac{e^{i\theta}}{2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\,tg(\frac{\theta}{2})$

3°/

a) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) + \left(\vec{i}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$

$$\equiv -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_C - z_A)(2\pi) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{-e^{i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} - e^{i\alpha}}\right)(2\pi) \equiv \arg\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \arg(\frac{1}{Z})(2\pi) \equiv -\arg(Z)(2\pi)$$

or d'après 1°/ Z est un nombre imaginaire alors $\arg(Z) \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \\ ou \\ -\dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

et par suite ABC est un triangle rectangle en A .

b) Pour que ABC soit un triangle isocèle il suffit que AB = AC

on a : AB = AC

$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = |-e^{i\beta} - e^{i\alpha}|$

$\Leftrightarrow |(\cos\beta - \cos\alpha) + i(\sin\beta - \sin\alpha)| = |(\cos\beta + \cos\alpha) + i(\sin\beta + \sin\alpha)|$

$(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 = (\cos\beta + \cos\alpha)^2 + (\sin\beta + \sin\alpha)^2$

$\Leftrightarrow \cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cos\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha$

$= \cos^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\beta\cos\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\beta\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha = 2 + 2\cos\beta\cos\alpha + 2\sin\beta\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos(\beta - \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \beta - \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad où \quad k \in Z$

$or -\pi < \beta - \alpha < \pi \;\; d'où -\pi < \dfrac{\pi}{2} + k\pi < \pi \Rightarrow \dfrac{-3\pi}{2} < k\pi < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow k = -1 \; ou \, k = 0 \; d'où \; \beta - \alpha = -\dfrac{\pi}{2} \, ou \, \beta - \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $\beta = \alpha - \dfrac{\pi}{2} \, ou \, \beta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$

Solution 15 :

1°/ OA $= |z_A - z_O| = |z|$

OB $= |z_B - z_O| = |\overline{z}| = |z|$

$$\text{OC} = |z_C - z_O| = \left|\frac{z^2}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|^2}{|\overline{z}|} = |z|$$

D'où OA = OB =OC et par suite A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O .

2°/ On a : AB $= |z_B - z_A| = |\overline{z} - z|$

$$\text{AC} = |z_C - z_A| = \left|\frac{z^2}{\overline{z}} - z\right| = \left|\frac{z^2 - z\overline{z}}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{z(z - \overline{z})}{\overline{z}}\right| = \frac{|z||z - \overline{z}|}{|\overline{z}|}$$

Or $|\overline{z}| = |z|$ donc AC $= |z - \overline{z}| = |\overline{z} - z|$ d'où AB = AC et par suite ABC est un triangle isocèle de sommet principal A .

3°/ $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \vec{i}}\right) + \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CA}}\right)(2\pi)$

$\equiv -\arg(z_B - z_C) + \arg(z_A - z_C)(2\pi) \equiv \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)(2\pi)$

$\equiv \arg\left(\dfrac{z - \dfrac{z^2}{\overline{z}}}{\overline{z} - \dfrac{z^2}{\overline{z}}}\right)(2\pi)$. *Or* $\dfrac{z - \dfrac{z^2}{\overline{z}}}{\overline{z} - \dfrac{z^2}{\overline{z}}} = \dfrac{z\overline{z} - z^2}{(\overline{z})^2 - z^2} = \dfrac{z(\overline{z} - z)}{(\overline{z} - z)(\overline{z} + z)} = \dfrac{z}{\overline{z} + z}$

Or $\overline{z} + z = (x - iy) + (x + iy) = 2x$ *d'où* $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z}{2x}\right)(2\pi)$

$\equiv \arg(z) - \arg(2x)(2\pi)$ *or* $x > 0$ *donc* $\arg(2x) \equiv 0(2\pi)$

Conclusion : $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \arg z\ (2\pi)$

$$4°/\ a) z' = \overline{z} + \frac{z^2}{z} = re^{-i\theta} + \frac{r^2 e^{i2\theta}}{re^{-i\theta}} = re^{-i\theta} + re^{i3\theta}$$

$$= re^{i\theta}(re^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) = re^{i\theta} 2\cos 2\theta = 2r\cos 2\theta e^{i\theta}$$

$$b) aff\,\overrightarrow{OM'} = z_{M'} - z_O = 2r\cos 2\theta e^{i\theta}$$

$$aff\,\overrightarrow{OM} = z_M - z_O = z = re^{i\theta}\ d'où\ aff\,\overrightarrow{OM'} = 2\cos 2\theta . aff\,\overrightarrow{OM}$$

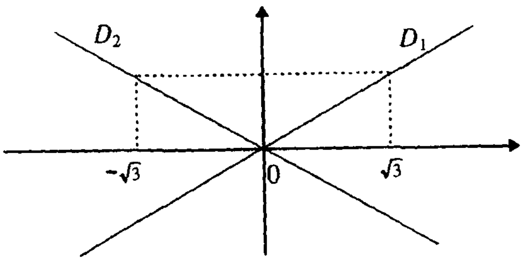
Conclusion : $\overrightarrow{OM'} = 2\cos 2\theta . \overrightarrow{OM}$ et par suite O,M et M' sont alignés .

$$c) z' = z \Leftrightarrow \overline{z} + \frac{z^2}{z} = z \Leftrightarrow \frac{(\overline{z})^2 + z^2}{\overline{z}} = z$$

$$\Leftrightarrow (\overline{z})^2 + z^2 = z\overline{z} \Leftrightarrow (\overline{z})^2 + z^2 = |z|^2\ or\ z = x + iy$$

on a : $(x + yi)^2 + (x + yi)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$
$x^2 - y^2 - 2xyi + x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}y$ ou $x = -\sqrt{3}y$

L'ensemble (E) est la réunion des deux droites $D_1 : x - \sqrt{3}y = 0$ et $D_2 : x + \sqrt{3}y\ y = 0$ privée du point O .



Solution 16 :

$$1°/\ f = \cos^3 x \sin 2x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)$$

$$f = \frac{(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})(e^{i2x} - e^{-i2x})}{16i}$$

$$f=\frac{e^{i5x}-e^{ix}+3e^{i3x}-3e^{-ix}+3e^{ix}-3e^{-i3x}+e^{-ix}-e^{-i5x}}{16i}$$

$$f=\frac{(e^{i5x}-e^{-i5x})+2(e^{ix}-e^{-ix})+3(e^{i3x}-e^{-i3x})}{16i}$$

$$f=\frac{2i\sin 5x+4i\sin x+6i\sin 3x}{16i}=\frac{1}{8}\sin 5x+\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{8}\sin 3x$$

2°/ $g=\cos^2 2x\sin 3x=\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)$

$$=\frac{(e^{i4x}+2+e^{-i4x})(e^{i3x}-e^{-i3x})}{8i}$$

$$=\frac{e^{i7x}-e^{ix}+2e^{i3x}-2e^{-i3x}+e^{-ix}-e^{-i7x}}{8i}$$

$$=\frac{(e^{i7x}-e^{-i7x})-(e^{ix}-e^{-ix})+2(e^{i3x}-e^{-i3x})}{8i}$$

$$=\frac{2i\sin 7x+4i\sin 3x-2i\sin x}{8i}=\frac{1}{4}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin x$$

3°/

$$h=\cos^4 x\sin x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)=\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{32i}$$

Or $\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4=e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}$

d'où $h=\dfrac{(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x})(e^{ix}-e^{-ix})}{32i}$

$$=\frac{e^{i5x}-e^{i3x}+4e^{i3x}+4e^{ix}+6e^{ix}-6e^{-ix}+4e^{-ix}-4e^{-i3x}+e^{-i3x}-e^{-i5x}}{32i}$$

$$=\frac{(e^{i5x}-e^{-i5x})+3(e^{i3x}-e^{-i3x})+10(e^{ix}-e^{-ix})}{32i}$$

$$=\frac{2i\sin 5x+6i\sin 3x+20i\sin x}{32i}$$

Conclusion : $h=\dfrac{1}{16}\sin 5x+\dfrac{3}{16}\sin 3x+\dfrac{5}{8}\sin x$

Solution 17 :

1°/ $\Delta = (\sqrt{3} - 3i)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 3 - 6\sqrt{3}\,i - 9 + 32 = 26 - 6\sqrt{3}\,i$

Cherchons x et y tel que : $(x + i\,y)^2 = \Delta$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 26 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(26)^2 + (6\sqrt{3})^2} \\ 2xy = -6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 26 & (1) \\ x^2 + y^2 = 28 & (2) \\ xy = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 27 \\ y^2 = 1 \\ x\,y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \\ x\,y < 0 \end{cases}$ donc $\Delta = (3\sqrt{3} - i)^2$

$$z' = \frac{(-\sqrt{3} + 3i) - (3\sqrt{3} - i)}{4} = -\sqrt{3} + i$$

$$z'' = \frac{(-\sqrt{3} + 3i) + (3\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

2°/ a) $\left| -\sqrt{3} + i \right| = \sqrt{3 + 1} = 2$; $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

donc $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$

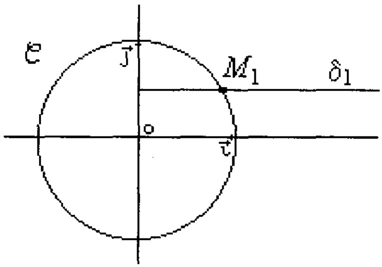
$z_1 = [r_1, \theta_1]$ on a : $r_1 = 1$; $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$

donc $z_1 = \left[1, \frac{\pi}{6} \right] = e^{i\frac{\pi}{6}}$

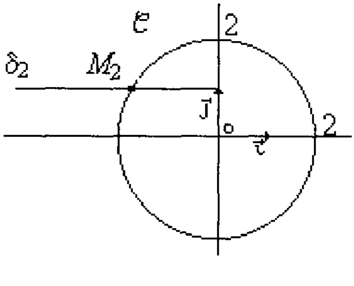
$z_2 = [r_2, \theta_2]$ on a : $r_2 = 2$; $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 \equiv \frac{5\pi}{6} (2\pi)$

donc $z_2 = \left[2, \frac{5\pi}{6} \right] = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) • $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ on a : M_1 d'affixe z_1 , $OM_1 = 1$ donc M_1 appartient au cercle C de centre O et de rayon 1, d'autre part l'imaginaire de z_1 est $\frac{1}{2}$ donc M_1 appartient à la demi-droite $\delta_1 : \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$ d'où la construction géométrique du point M_1 (M_1 est le point d'intersection du cercle C et de la demi-droite δ_1).



• $z_2 = -\sqrt{3} + i$ on a : M_2 d'affixe z_2 , $OM_2 = 2$ donc M_2 appartient au cercle C' de centre O et de rayon 2, d'autre part l'imaginaire de z_2 est 1 donc M_2 appartient à la demi-droite $\delta_2 : \begin{cases} y = 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$ d'où la construction géométrique du point M_2 (M_2 est le point d'intersection du cercle C'' et de la demi-droite δ_2).



Solution 18 :

1°/ a) θ étant un argument de ω, il reste à trouver $|\omega| = \rho$.

$$\omega = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \text{ or } \rho\sin\theta = tg\,\theta \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\omega = \left[\frac{1}{\cos\theta}, \theta\right] = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$$

$$\omega = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

b) on a : $\omega = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 + i\,tg\,\theta$

Donc $\omega = 1 + i\,tg\,\theta$

2°/ $2z^2 - (1+i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

$$\Delta = (1+i\sqrt{3})^2 - 8(-1+i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3} + 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$\Delta = 6 - 6i\sqrt{3} = 6 - 3\cdot 2(i\sqrt{3}) = 3^2 - 3\cdot 2(i\sqrt{3}) + (i\sqrt{3})^2$$

$\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2$ une racine carrée de Δ est $3 - i\sqrt{3}$

$$z' = \frac{1+i\sqrt{3} - 3 + i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z'' = \frac{1+i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{4} = 1$$

$$S_C = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3°/ a) $CA = CB \Leftrightarrow |z_1 - z| = |z_2 - z| \Leftrightarrow |1 - z| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - z\right|$

$$\Leftrightarrow |-i\,tg\,\theta| = \left|-\frac{3}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - tg\,\theta\right)\right| \Leftrightarrow tg^2\theta = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3}tg\,\theta + tg^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad tg\,\theta = \sqrt{3} \text{ or } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Conclusion : Pour que $CA = CB$; il faut que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Pour montrer que CAB est équilatéral; il suffit de montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ car CAB est isocèle.

$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \arg(\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega})(2\pi) \equiv \arg(z_2-\omega)-\arg(z_1-\omega)(2\pi)$

Or $\quad z_2-\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-(1+i\sqrt{3})=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow z_2-\omega=-\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=-\sqrt{3}\left[1,\frac{\pi}{6}\right]=\left[\sqrt{3},\frac{\pi}{6}+\pi\right]$

$\Rightarrow z_2-\omega=\left[\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right] \Rightarrow \arg(z_2-\omega)\equiv\frac{7\pi}{6}(2\pi)$

$\Rightarrow z_1-\omega=-i\sqrt{3} \Rightarrow \arg(z_1-\omega)\equiv\frac{-\pi}{2}(2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\equiv\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2\pi)\equiv\frac{5\pi}{3}(2\pi) \Rightarrow$

$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\equiv-\frac{\pi}{3}(2\pi)$

Conclusion : $\begin{cases} CA=CB \\ (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\equiv-\frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow ABC$ est un triangle

équilatéral.

Solution 19 :

1°/ $\Delta=a^2(1+i)^2-4ia^2=2ia^2-4ia^2=-2ia^2=(1-i)^2a^2$. une racine carrée de Δ est $\delta=(1-i)a$.

$$z_1=\frac{a(1+i)-(1-i)a}{2}=ia$$

$$z_2=\frac{a(1+i)+(1-i)a}{2}=a$$

$$S_C=\{ia,a\}$$

2°/ On a : $a=\rho e^{i\theta}$

a) $z_1=ia=e^{i\frac{\pi}{2}}\rho e^{i\theta}=\rho e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$z_2=\rho e^{i\theta}$

b) $z_1^{2n}+z_2^{2n}=(ia)^{2n}+a^{2n}=a^{2n}(1+(i)^{2n})=a^{2n}(1+(-1)^n)$

3°/ $OA = |z_A - z_0| = |ia - 0| = |i||a| = |a|$

$OB = |z_B - z_0| = |a|$

Donc $OA = OB$ et par suite OAB est un triangle isocèle de sommet principal O.

Or $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \arg(\frac{z_A - z_0}{z_B - z_0})\ (2\pi)$

$\equiv \arg(\frac{ia}{a})\ (2\pi) \equiv \arg(i)\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Conclusion : OAB est un triangle isocèle et rectangle en O.

Solution 20 :

1°/ $1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}})$

$= e^{i\frac{\alpha}{2}} (2\cos\frac{\alpha}{2}).$

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, on a : $1 + e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$1 - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}})$

$= -2i\sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}$

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, on a : $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

2°/ a) (*) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$. On pose $Z = z^n$ l'équation devient : $Z^2 + Z + 1 = 0$

$\Delta = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$, une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{3}\,i$.

$Z' = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$, $Z'' = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

Or $Z = z^n$ donc $z^n = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ ou $z^n = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

Donc les solutions de l'équation (*) sont les racines $n^{\text{ième}}$ de $Z' = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ et les racines $n^{\text{ième}}$ de $Z'' = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$.

or $Z' = e^{4i\frac{\pi}{3}} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $Z'' = e^{2i\frac{\pi}{3}}$; $Z'' = \overline{Z'}$

Les racines nième de Z' sont $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n} - \frac{2\pi}{3n})}$

Les racines nième de Z'' sont $z'_k = e^{i(-\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{3n})}$ avec $k \in \{0,1,2,\cdots\cdots,n-1\}$.

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0$; $z \neq 1$; $z \neq -1$

On pose $Z = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow$ l'équation devient :

$Z^n + \frac{1}{Z^n} + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^{2n} + Z^n + 1 = 0$

d'où $Z_k = e^{i\theta_k}$ ou $Z_k = e^{-i\theta_k}$

avec $\theta_k = \frac{2k\pi}{n} - \frac{2\pi}{3n}$ / $0 \leq k \leq n-1$

$\frac{1+z}{1-z} = Z \Leftrightarrow 1 + z = Z - zZ \Leftrightarrow z(1+Z) = Z - 1 \Leftrightarrow z = \frac{Z-1}{Z+1}$

$$z_k = \frac{Z_k - 1}{Z_k + 1} = \frac{e^{i\theta_k} - 1}{e^{i\theta_k} + 1} = \frac{2i\sin(\frac{\theta_k}{2})e^{i\frac{\theta_k}{2}}}{2\cos(\frac{\theta_k}{2})e^{i\frac{\theta_k}{2}}}$$

$z_k = i\,\mathrm{tg}(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{3n})$ avec $0 \leq k \leq n-1$

Solution 21 :

1°/ a) $\Delta = 4(1+\cos 2t)^2 - 8(1+\cos 2t) = 4(1+\cos 2t)(1+\cos 2t - 2)$
$= 4(\cos^2 2t - 1) = -4\sin^2 2t = (2i\sin 2t)^2$

d'où $z' = \frac{2((1+\cos 2t) + 2i\sin 2t}{2} = 1 + \cos 2t + i\sin 2t$

$z'' = 1 + \cos 2t - i\sin 2t$

$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\sin 2t > 0$ d'où $z_1 = 1 + \cos 2t + i\sin 2t$

et $z_2 = 1 + \cos 2t - i\sin 2t$.

b) $z_1 = 1 + \cos 2t + i\sin 2t = 1 + (2\cos^2 t - 1) + i2\sin t\cos t$

$= 2\cos t(\cos t + i\sin t)$. Or $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\cos t > 0$ d'ou $z_1 = [2\cos t, t]$

2°/ a) $aff\ \overrightarrow{OM_1} = z_{M_1} - z_O = 1 + \cos 2t + i \sin 2t$

$aff\ \overrightarrow{AM} = z_M - z_A = 1 + e^{it} - 1 = \cos t + i \sin t$

b) $aff\ \overrightarrow{OM_1} = 1 + \cos 2t + i \sin 2t = 2\cos t(\cos t + i \sin t) = 2\cos t \cdot aff\ \overrightarrow{AM}$

d'où $aff\ \overrightarrow{OM_1} = 2\cos t \cdot \overrightarrow{AM}$ d'ou $(OM_1)//(AM)$.

Solution 22 :

1°/ a) z_0 étant une solution imaginaire pure donc $z_0 = yi$ où $y \in \mathbf{R}$

$f(z_0) = f(yi) = -y^3 i - 2(-\sqrt{3} + i)y^2 + 4i(1 - i\sqrt{3})y + 8i$

$f(z_0) = -iy^3 + 2\sqrt{3}y^2 - 2y^2 i + 4iy + 4\sqrt{3}y + 8i$

$= (2\sqrt{3}y^2 + 4\sqrt{3}y) + i(-y^3 - 2y^2 + 4y + 8)$

$$f(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 + 4\sqrt{3}y = 0 & (1) \\ -y^3 - 2y^2 + 4y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(y^2 + 2y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -2$

$y = 0$ ne vérifie pas (2) ; $y = -2$ vérifie (2)

Conclusion : $z_0 = -2i$

b) $\forall z \in \mathbf{C}$ on a : $f(z) = (z + 2i)(z^2 + bz + 4)$

$= z^3 + bz^2 + 4z + 2iz^2 + 2ibz + 8i$

$= z^3 + (b + 2i)z^2 + (4 + 2ib)z + 8i$

$$\begin{cases} b + 2i = 2(-\sqrt{3} + i) \\ 4 + 2ib = 4(1 - i\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2\sqrt{3} \\ 2ib = -4i\sqrt{3} \end{cases} \quad b = -2\sqrt{3}$$

Conclusion : $f(z) = (z + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i \quad (*)$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad (**)$

$(**)$: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{3})^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z - \sqrt{3})^2 = i^2$

$\Leftrightarrow z-\sqrt{3}=i$ ou $z-\sqrt{3}=-i$

$z=\sqrt{3}+i$ ou $z=\sqrt{3}-i$

On pose alors $z_1=\sqrt{3}-i$; $z_2=\sqrt{3}+i$

2°/ a) $z_1=\sqrt{3}-i$; $z_2=\sqrt{3}+i$

$$\omega=\frac{z_1}{z_0}=\frac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

b) OMM_1M_2 est un losange si et seulement si : $\begin{cases} O*M_1=M*M_2 \\ \text{et} \\ (OM_1)\perp(MM_2) \end{cases}$

Soit $I=O*M_1$ on a : $z_I=\dfrac{z_D+z_{M_1}}{2}=\dfrac{\omega z}{2}$

$J=M*M_2$ on a : $z_J=\dfrac{z_M+z_{M_2}}{2}=\dfrac{z+\omega^2 z}{2}=\dfrac{z(1+\omega^2)}{2}$

On a : $1+\omega^2=1+\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d'où $1+\omega^2=\omega$ et par suite : $z_I=z_J$

d'où $O*M_1=M*M_2$

$$(\overrightarrow{OM_1},\widehat{\ \overrightarrow{MM_2}})\equiv\arg\left(\frac{z_{M_2}-z_M}{z_{M_1}-z_0}\right)(\pi)$$

$$\equiv\arg\left(\frac{\omega^2 z-z}{\omega z}\right)(\pi)\equiv\arg\left(\frac{\omega^2-1}{\omega}\right)(2\pi)$$

or $\dfrac{\omega^2-1}{\omega}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}(-i+\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{3}i$ d'où $\arg\left(\dfrac{\omega^2-1}{\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi)$

Conclusion : $(OM_1) \perp (MM_2)$

OMM_1M_2 est un losange.

Solution 23 :

1°/ $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral si :

$\Re(M_1, \frac{\pi}{3})(M_2) = M_3 \quad \Leftrightarrow M_1M_2 = M_1M_3$ et $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) \equiv \dfrac{\pi}{3}$

(1) : $\Re(M_1, \frac{\pi}{3})(M_2) = M_3 \Leftrightarrow (z_3 - z_1) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_2 - z_1)$

or $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\bar{j} = -j^2$

d'où $(z_3 - z_1) = -j^2(z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_3 - z_1 + j^2 z_2 - j^2 z_1 = 0$

$\Leftrightarrow -(1+j^2)z_1 + j^2 z_2 + z_3 = 0$ or $1 + j + j^2 = 0$ d'où $-(1+j^2) = j$

d'où $jz_1 + j^2 z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow j(z_1 + jz_2 + j^2 z_3) = 0$ car $j^3 = 1$

d'où $z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$

(2) : $\Re(M_1, \frac{\pi}{3})(M_3) = M_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_3 - z_1)$

$\Leftrightarrow z_2 - z_1 = -j^2(z_3 - z_1) \Leftrightarrow j^2 z_1 + z_1 - z_2 - j^2 z_3 = 0$

$\Leftrightarrow -jz_1 - z_2 - j^2 z_3 = 0 \Leftrightarrow j(z_1 + j^2 z_2 + jz_3) = 0 \Leftrightarrow z_1 + j^2 z_2 + jz_3 = 0$

2°/ a) Soit $P(z) = z^3 - (1 + a + ia)z^2 + a(1 + i + ia)z - ia^2$

$P(1) = 1 - (1 + a + ia) + a(1 + i + ia) - ia^2$

$= 1 - 1 - a - ia + a + ia + ia^2 - ia^2 = 0$

b) $P(z) = (z-1)(z^2 + bz + ia^2) \quad = z^3 + bz^2 + ia^2 z - z^2 - bz - ia^2$

$= z^3 + (b-1)z^2 + z(ia^2 - b) - ia^2$ d'où $b - 1 = -1 - a - ia$

$b = -a - ia$

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=1$ ou (*) $z^2-a(1+i)z+ia^2=0$

<u>*Résolution de (*)*</u> : $\Delta=a^2(1+i)^2-4ia^2=a^2(-2i)=a^2(1-i)^2$

d'où $z'=\dfrac{a(1+i)-a(1-i)}{2}=ai$ et $z''=\dfrac{a(1+i)+a(1-i)}{2}=a$

$S_{\mathbb{C}}=\{1, ai, a\}$

c) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$z_A+jz_B+j^2z_C=0$ ou $z_A+j^2z_B+jz_C=0$

$z_A+jz_B+j^2z_C=0 \Leftrightarrow 1+iaj+aj^2=0 \Leftrightarrow a(j^2+ij)=-1 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{j(i+j)}$

$z_A+j^2z_B+jz_C=0 \Leftrightarrow 1+j^2ai+aj=0 \Leftrightarrow a(j+ij^2)=-1 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{j(1+ij)}$

Les différentes valeurs possibles de a répondant à la question posée sont : $\dfrac{-1}{j(i+j)}$; $\dfrac{-1}{j(1+ij)}$

Solution 24 :

1°/a) Soit $z_0=yi$ où $y\in\mathbb{R}$ z_0 est une racine de E si :

$-y^3 i-2(1-i)y^2+(1+m^2-4i)yi-2i(1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow -y^3 i-2y^2+2y^2 i+(1+m^2)yi+4y-2i(1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow -2y^2+4y+i[(-y^3+2y^2+y(1+m^2)-2(1+m^2)]=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y(2-y)=0 & (1) \\ -y^3+2y^2+y(1+m^2)-2(1+m^2)=0 & (2) \end{cases}$$

(1) s'écrit : y = 0 ou y = 2 or y = 0 ne vérifie pas (2)

y = 2 vérifie l'équation (2)

<u>Conclusion</u> : $z_0=2i$

b) (E) s'écrit : $(z-2i)(az^2+bz+c)=0$

$\Leftrightarrow az^3+(b-2ai)z^2+(c-2ib)z-2ic=0$ donc on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2ai=2(1-i) \\ c-2ib=1+m^2-4i \\ -2ic=-2i(1+m^2) \end{cases}$$

d'où : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1+m^2$

(E) s'écrit : $(z - 2i)(z^2 + 2z + 1 + m^2) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ (*)

$\Delta = 4 - 4(1+m^2) = (2im)^2$ d'où $z' = -1 - im$ et $z'' = -1 + im$

2°/ a) Soit $I = A*B$ et $J = M'*M''$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2i - 2 - 2i}{2} = -1$$

$$z_J = \frac{-1 - im - 1 + im}{2} = -1$$

donc on a : $A*B = M'*M''$ par suite $AM'BM''$ est un parallélogramme

b) $AM'BM''$ est un rectangle si $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AM''} = 0$

on a : $z_{\overrightarrow{AM'}} = -1 - im - 2i = -1 - (m+2)i$

$z_{\overrightarrow{AM''}} = -1 + im - 2i = -1 + (m-2)i$

on a : $\overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix} -1 \\ -m-2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM''}\begin{pmatrix} -1 \\ m-2 \end{pmatrix}$

d'où : $1 + (m-2)(-m-2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$

Solution 25 :

1°/ M est un point invariant par f $\Leftrightarrow$ f(M) = M $\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow$

$\frac{z-a}{z-1} = z \Leftrightarrow z^2 - z = z - a \Leftrightarrow z^2 - 2z + a = 0.$

2°/ a) $z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = (i\,e^{i\theta})^2$

$\Leftrightarrow z = 1 + i\,e^{i\theta}$ ou $z = 1 - i\,e^{i\theta}$

$S_C = \{1 + i\,e^{i\theta} , \; 1 - i\,e^{i\theta}\}$

b) Soit $z' = 1 + i\,e^{i\theta} = 1 - e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ On pose $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

On a alors : $z' = 1 + e^{i\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$ d'où $z' = 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$

On a : $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0$

D'où $\quad z' = -2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})e^{i(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$

C'est la forme trigonométrique de z' :-2cos

Soit $z'' = 1 - i\,e^{i\theta} = 1 + e^{i(\frac{-\pi}{2})}e^{i\theta} = 1 + e^{i\beta}$ où $\beta = \theta - \frac{\pi}{2}$

$z'' = 2\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\beta}{2}} = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$

On a : $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}) > 0$

D'où $z'' = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}).\left(\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$ est la forme trigonométrique.

3°)a) $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}) \equiv \arg(z-1)+\arg(z'-1)\ [2\pi]$

$\equiv \arg[(z-1).(z'-1)]\ \ [2\pi] \equiv \arg(2)\ \ [2\pi] \equiv 0\ [2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}) - (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BM},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BA}}) - (\widehat{\overrightarrow{BA},\vec{u}}) - (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\ [2\pi]$

or $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}) \equiv -(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\ [2\pi]$

d'où : $(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}) - (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}}) \equiv 2(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BA}})\ [2\pi] \equiv 0\ [2\pi]$

Car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires et de sens opposés.

d'où $(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}})\ \ [2\pi]$

donc [BA) est une bissectrice de $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

b) z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow\ \overline{z'} = -z' \Leftrightarrow \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

$\Leftrightarrow\ (\overline{z}+1).(z-1) = (1+z).(1-\overline{z})$

$\Leftrightarrow |z^2| - \overline{z} + z - 1 = 1 - \overline{z} + z - |z^2| \Leftrightarrow |z^2| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

c) Soit $M \in \mathcal{C} \setminus \{B\}$ où $\mathcal{C}$: le cercle trigonométrique

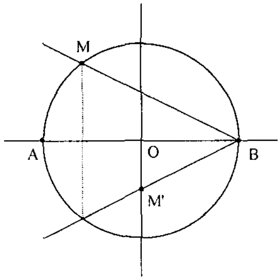
On a : OM=1 et $M \neq B$ donc $|z| = 1$ d'où z' est un nombre imaginaire

d'où $M' \in (O, \vec{v})$.

D'autre part on a : [BA) est une bissectrice de $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$

Donc : $S_{(BA)}(BM) = (BM')$ d'où : $M' \in S_{(BA)}(BM)$

D'où la construction du point M' :



Solution 26 :

Soit $z = x + iy$.

1°/ $4 - z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 4 \Leftrightarrow x = 2$

d'où l'ensemble des points $M(z)$ tels que $4 - z - \bar{z} = 0$ est la droite Δ.

2°/a) On a : $z' = \dfrac{4 - x^2 - y^2}{4 - 2x}$ donc $z' \in \mathbf{R}$.

b) $z' = k \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 4k - 2kx$ avec $x \neq 2 \Leftrightarrow$
$x^2 - 2kx + y^2 + 4k - 4 = 0$ avec $x \neq 2$ $\Leftrightarrow (*)$ $(x-k)^2 + y^2 = (k-2)^2$ avec $x \neq 2$.

Si $x = 2$ $(*)$ nous donne $(2-k)^2 + y^2 = (k-2)^2$ d'où $y = 0$
donc Γ est le cercle de centre $I(k,0)$ et de rayon $|k-2|$ privé du point $A(2,0)$

3°/a) • $|z' - z| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - z\right| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z} - 4z + z^2 + z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right|$

$= \dfrac{|(z-2)^2|}{|4 - z - \bar{z}|} = \dfrac{|z-2|^2}{|4-2x|} = \dfrac{(x-2)^2 + y^2}{|4-2x|}$

• $|z' - 2| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - 2\right| = \left|\dfrac{-4 - z\bar{z} + 2z + 2\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right| = \left|\dfrac{4x - x^2 - y^2 - 4}{4 - 2x}\right|$

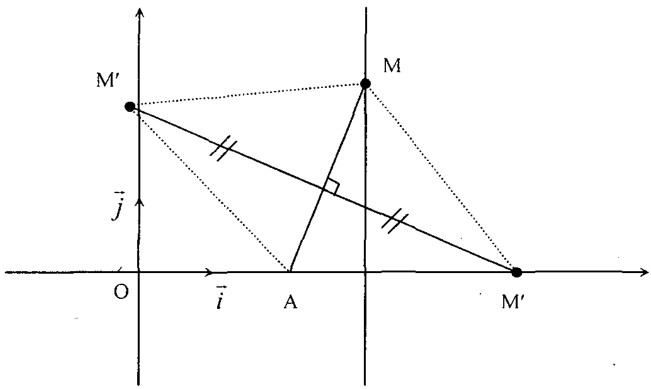
$= \dfrac{(x-2)^2 + y^2}{|4-2x|}$ d'où $|z' - z| = |z' - 2|$

b) On a : $|z'-z| = MM'$ et $|z'-2| = AM'$ or d'après 3°/ a) on a :

$|z'-z| = |z'-2|$ donc $AM' = MM'$ d'où M' appartient à la médiatrice de [AM]. Or d'après 2°/ a) $z' \in \mathbf{R}$ d'où $M' \in$ l'axe des abscisses.

Conclusion : M' est le point d'intersection de la médiatrice de [AM] avec l'axe des abscisses.

4°/



On a : $AM' = M'M$ car M' appartient à la médiatrice de [AM].

D'autre part : $S_{(AM)}$: $A \to A$

$M \to M'$

$M' \to M''$ et comme $S_{(AM)}$ conserve les distances alors $AM' = AM''$ et $MM' = MM''$ d'où $AM'' = M''M = M'M = AM'$ donc $AM'MM''$ est un losange d'où $(M''M) \,//\, (AM')$ et comme $(AM') \perp D$ alors $(M''M) \perp D$ d'où M est le projeté orthogonal de M'' sur D donc $M''M = d(M'', D)$

ISOMETRIES - DEPLACEMENT - ANTIDEPLACEMENT

Résultats à retenir :

1) a) Une isométrie du plan est une application qui conserve les distances.

b) Les réflexions, translations, rotations sont des isométries.

c) Les isométries d'un plan :

Transforment une droite en une droite, un segment en un segment, un cercle en un cercle de même rayon, conservent le contact, le parallélisme, les milieux, les angles géométriques, les aires.

2) a) On appelle déplacement du plan toute isométrie qui conserve les angles orientés.

b) étant donné des points A, B, $\mathbf{A', B'}$ tels que $\mathbf{A'B' = AB}$ **et** $\mathbf{A \neq B}$ alors il existe un déplacement f et un seul transformant A en $\mathbf{A'}$ **et** $\mathbf{B}$ **en** $\mathbf{B'}$.

si $\overrightarrow{\mathbf{AA'}} = \overrightarrow{\mathbf{BB'}}$ alors f est une translation.

si $(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{A'B'}}}) \not\equiv \mathbf{0(2\pi)}$ alors f est une rotation d'angle

$\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{A'B'}}})(2\pi)$

3) a) on appelle antidéplacement du plan toute isométrie qui transforme les angles en leurs opposés.

b) Soit f un antidéplacement alors $\mathbf{f = S_\Delta}$ ou $\mathbf{f = S_\Delta \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_\Delta}$

où $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ (f est dite symétrie glissante, elle n'a pas de point invariant).

c) Etant donné A, B, C, D quatre points tel que

$\mathbf{A \neq B}$ **et** $\mathbf{AB = CD}$ alors il existe un unique antidéplacement g transformant A en C et B en D.

$\mathbf{g = f \circ S_{(AB)} = S_{(AD)} \circ f}$ où f est le déplacement vérifiant

$\mathbf{f(A) = C}$ **et** $\mathbf{f(B) = D}$.

4) Soit Δ_1 **et** Δ_2 deux droites

* si $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$ **alors** $\mathbf{S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2}}$ est une translation

* si $\Delta_1 \times \Delta_2$ alors $\mathbf{S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2}}$ est un rotation de centre I point d'intersection de Δ_1 **et** Δ_2 et d'angle $\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) \quad (2\pi)$

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit ABCD un carré de sens direct et O son centre

1°/ Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer r (A) , r (B) et r (C) .

2°/ Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

a) Montrer que r (I) = J
b) Montrer que le triangle OIJ est isocèle rectangle

Exercice 2 :

Dans le plan orienté P , on considère un triangle équilatéral ABC tel que : $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point de P . On pose N = r_1(M) et M' = r_2 (N) .

Soit $r = r_2 \circ r_1$.

1°/

a) Soit D = $S_{(AB)}$(C) . Déterminer r (D) et r (B) .
b) Montrer que r est la symétrie centrale de centre Ω = B * D .
c) Montrer que Ω = M * M' .

2°/

a) Montrer que le triangle AMN est équilatéral .
On suppose que M , N et M' sont alignés .
b) Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA})} \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

Exercice 3 :

Dans le plan orienté , on considère deux points distincts A et B . On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan , on note M_1 et M_2 les images repectives de M par R_A et R_B .

1°/ On considère l'application $T = R_B \circ R_A^{-1}$.

a) Construire le point C image de A par T .
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T
c) En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA .

2°/ On suppose que le point M décrit le cercle Γ de diamètre [AB] .

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 décrit par le point M_2 quand M décrit Γ .
b) Soit $\omega_1 = A * B$ et $\omega_2 = B * C$

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer l'ensemble décrit par le point I milieu de $[M_1M_2]$ quand M décrit Γ .

Exercice 4 :

Le plan est orienté .

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = 2AB .

On désigne par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et I l'image de K par la symétrie orthogonale S_1 d'axe (AB) et J l'image de K par la symétrie orthogonale S_2 d'axe (AC) .

1°/ Montrer que (BI) $\perp$ (AI) et que (CJ) $\perp$ (AJ) .

2°/ Préciser la nature de la composée $S_2 \circ S_1$ puis prouver que A est le milieu de [IJ] .

3°/ Montrer que CJ = IJ . (penser à calculer tg θ, où θ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK}})$

Exercice 5 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle *ABC* de sens direct. On note A' , B' , C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1°/ Construire les points *M* et *N* tels que :

$MA = MC$ et $(\overrightarrow{MA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}\,(2\pi)$

$NA = NA$ et $(\overrightarrow{NB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{NA}) \equiv \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$

2°/ a)Démontrer que $MB' = A'C'$ et que $NC' = A'B'$.

b) En déduire qu'il existe une rotation unique r telle que :

$r(M) = A'$ et $r(B') = C'$.

Déterminer l'angle de r.

3°/ a) Démontrer que $r(A') = N$

b) Quelle est la nature de l'application $r \circ r$?

En déduire le centre de r.

c) Quelle est la nature du triangle $MA'N$?

Exercice 6 :

On considère dans le plan orienté , un triangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ t$ et $t \circ r$.

2°/ Soit M un point du plan

on pose $M_1 = r \circ t(M)$ et $M_2 = t \circ r(M)$

Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2?

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle quelconque de sens direct .

On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARB, BPC et CQA isocèles rectangles respectivement en R, P et Q.

1°/ a) Soit $I = A*B$ et $r_P = r(P, \frac{\pi}{2})$; $r_Q = r(Q, \frac{\pi}{2})$

Montrer que $r_P \circ r_Q = S_I$

b) En déduire que IPQ est un triangle rectangle isocèle.

2°/ Soit $J = A*C$ et $K = B*C$ on pose $r_R = \mathcal{R}(R, \frac{\pi}{2})$

a) Démontrer que $r_Q \circ r_R = S_K$; $r_R \circ r_P = S_J$

b) En déduire que KQR et JPR sont des triangles rectangles isocèles.

3°/ Démontrer que les droites (QB) ; (RC) et (AP) sont concourantes.

Exercice 8 :

Dans le plan orienté, ABC désigne un triangle isocèle de sommet principal A et vérifiant $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC.

On note $R_A = \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})$; $R_C = \mathcal{R}(C, \frac{\pi}{4})$

1°/ a) Construire le point A' image de A par la rotation R_C.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $R_C \circ R_A$.

c) montrer que $IA' = IA$ et que $(IA') // (AB)$

2°/ La droite (CI) coupe (AB) en E, les droites $(A'E)$ et (BI) se coupent en K, on désigne par :

h_C : l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$

h_K : L'homothétie de centre K et de rapport $-\sqrt{2}$

a) Déterminer $h_C(B)$, $h_C(E)$ en déduire que $\overrightarrow{BE} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{IA'}$

b) Déterminer $h_K \circ h_C(B)$

3°/ Donner la nature de $h_K \circ h_C$ et ses éléments caractéristiques. En déduire que C, K, M sont alignés où $M = E * B$.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté , on considère un triangle ABC de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, ainsi que le parallélogramme $AGKE$.

On désigne par $M = B * C$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1°/ a) Montrer qu'il existe un déplacement f dont on déterminera ses éléments caractéristiques transformant le triangle ABC en le triangle GKA.

b) Montrer que les points H, A, K sont alignés.

c) Montrer que les droites (AM) et (EG) sont perpendiculaires.

2°/ a) Montrer que $FB = CK$

b) Donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CK}})$

3°/ a) Montrer qu'il existe un déplacement g qui transforme le triangle ABC en le triangle EAK dont on déterminera ses éléments caractéristiques.

b) Prouver que $DC = BK$ et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BK}})$

4°/ Montrer que les droites (AK), (BF) et (CD) sont concourantes.

Exercice 10 :

OAB un triangle isocèle de sens direct tel que $OA = AB$ et P un point du segment $[AB]$ distinct, de A et de B.

La parallèle à (OB) passant par P coupe (OA) en A'.

La parallèle à (OA) passant par P coupe (OB) en B'.

1°/ Justifier l'existence d'une rotation r tels que $r(O) = B$ et $r(A) = O$.

2°/ Déterminer $r(A')$ et le centre Ω de la rotation r.

3°/ Démontrer que O, A', B', Ω sont cocycliques.

Exercice 11 :

On donne dans le plan $(\mathcal{P})$ un triangle isocèle $OO'A$ avec

$(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B.

Atout point M de $(\mathcal{C})$, on associe le point M' de $(\mathcal{C}')$ tel qu'une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.

1°/ Montrer qu'il existe une rotation r, que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M'.

2°/ $M \neq B$, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $(\mathcal{C}')$ en N' et $(\mathcal{C})$ en N. Montrer que $r(N) = N'$.

Exercice 12 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que:

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et $AB < AC$.

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point de $[AC]$ tel que $AB = CP$.

La droite (OE) coupe $\mathcal{C}$ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc$[BC]$ du cercle $(\mathcal{C})$.

1°/ a) Faire une figure.

b) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$(\widehat{\vec{MB}, \vec{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$.

c) Trouver l'ensemble des points M du plan tel que :

$(\widehat{\vec{MB}, \vec{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et $MB < MC$.

2°/ a) Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.

b) Démontrer que le centre de R est un point de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

c) Quelle est la nature du triangle JAP?

3°/ Déterminer l'image de B par la composée $R \circ S_B$ où S_B désigne la symétrie de centre B.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

Exercice 13 :

Soient A, B, C trois points non alignés tel que le triangle ABC soit rectangle en A de sens direct. On désigne par $S_{(AB)}$, $S_{(BC)}$ et $S_{(CA)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB), (BC) et (CA) et par f l'application $S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.

1°/ Montrer que f est un antidéplacement.

2°/ Montrer que f est une symétrie glissante .

3°/ Donner la forme réduite de f.

Exercice 14 :

Soit ABCD un carré de sens direct et de centre O . Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et D en C .

1°/ Montrer que f est une symétrie glissante .

2°/ Soit E = f (C)

a) Montrer que DEC est un triangle isocèle rectangle en C .

b) Construire le point E .

c) Déterminer et construire l'image du point B par f .

3°/ Déterminer la forme réduite de f .

4°/ Déterminer et caractériser l'application $f \circ S_{AD}$.

Exercice 15 :

Soit l'équation (E) : $z^3 - (2-4i)z^2 - (9-10i)z + 18 + 6i = 0$.

1°/

a) Vérifier que 3 est une racine de (E) .

b) En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 . (z_1 étant la racine ayant une partie réelle positive) .

2°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A , B et C trois points d'affixes respectives 3 , z_1 et z_2 .

a) Montrer que OABC est un paarllélogramme

b) Montrer qu'il existe un déplacement f et un antidéplacement g transformant O en b et A en C .

3°/ Donner la nature et les éélments caractéristiques de f .

4°/ Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA) .

Monter que $g = f \circ S$.

Exercice 16 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit r l'application de $P \rightarrow P$ qui à tout point m (x , y) associe M'(x' , y')

tel que : $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}$

1°/ Montrer que r est une rotataion dont on précisera son centre A et un mesure de son angle

2°/ Montrer que le triangle AMM' est rectangle isocèle .

3°/ Soit $f = r \circ S_\Delta$ où Δ est la droite d'équation x = 0 .

Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques .

Exercice 17 :

Dans la figure ci-contre , ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1 , BCO_2 , CDO_3 et DAO_4 sont des triangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4 . On suppose que le plan est orienté et que $(\widehat{\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_1B}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

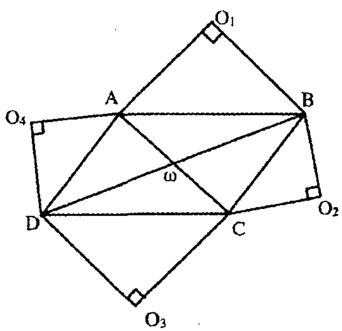
On désigne par R_1 , R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4 .

1°/ a)Déterminer ($R_2 \circ R_1$) (A) , ($R_3 \circ R_2$) (B) et ($R_4 \circ R_3$) (C)
b)Montrer que les applications ($R_2 \circ R_1$) , ($R_3 \circ R_2$) et ($R_4 \circ R_3$) sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f .

2°/ a) Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$.
b) Montrer que $f(O_2) = O_4$.
c) Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3°/ Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g = R_2 \circ S_\Delta$.

4°/ a)Détermine g(A) et g(O_1)
b)Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g .
c) Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g .



Exercice 18 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -e^{i\frac{2\pi}{3}}z + i$

1°/ Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle.

2°/ Soit la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$M_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N} : M_{n+1} = f(M_n)$

a) Soit z_n l'affixe du point M_n et $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$

Montrer qu'il existe un unique nombre complexe a tel que $\forall n \in \mathbf{N} : Z_{n+1} = a Z_n$.

b) Trouver l'ensemble des entiers naturels p tel que $a^p = 1$

c) Calculer z_n en fonction de n. Que vaut z_{2000} ?

Exercice 19 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de sens indirect *a, b, c, d* les affixes respectives des points *A, B, C, D*. On construit à l'extérieur du quadrilatère les triangles M_1AB, M_2BC ; M_3CD et M_4AD rectangles isocèles respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4.

1°/ Déterminer en fonction de *a, b, c, d* les affixes des points M_1, M_2, M_3, M_4.

2°/ a) Démontrer que $(M_1\ M_3)\perp(M_2\ M_4)$

b) Démontrer que $M_1\ M_3 = M_2\ M_4$.

Exercice 20 :

Soit ABC un triangle. a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.

1°/ Montrer que ABC est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si $(c-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

2°/ Montrer que ABC est un triangle équilatéral de sens indirect si et seulement si $(c-a)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

3°/ Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Exercice 21 :

Soit un triangle ABC quelconque , M = B * C . les triangles de ce sens direct BAB' et CAC' sont rectangles et isocèles de sommet A . le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c .

3°/ Déterminer les affixes m , b' et c' des points M , B' et C' .

4°/ Démontrer que (AM) $\perp$ (B'C') et que B'C' = 2AM .

Exercice 22 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\vec{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A et B distincts d'affixes respectives z_1 et z_2 . Soient A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, B' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4°/ Exprimer les affixes z_1 et z_2 des points A' et B' en fonction de z_1 et z_2 .

5°/ Quelle est l'affixe du milieu I de [A'B'] ?

6°/ Déterminer l'affixe du point H défini par : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AB}$.

7°/ En déduire que la médiatrice (OI) du triangle OA'B' est une hauteur du triangle OAB et que OI = $\frac{1}{2}$ AB .

Exercice 23 :

Dans le plan P orienté , rapporté au repère orthonormé direct $\left(\vec{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points distincts A , B et C d'affixes respectives a , b et –b .

1°/ Donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par a et b pour les points A , B et C soient alignés .

On suppose dans la suite que les points A , B et C ne sont pas alignés et que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est de sens direct

2°/ Sur les droites (AB) et (AC) , à l'extérieur du triangle ABC , on construit les carrés AFGB et ACDE et le parallélogramme AEHF de façon que $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$ soient de sens direct .

a) En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E , montrer que l'affixe e du point E est e = –ib + a (1 - i) .

b) Calculer les affixes f , h et d des points F, H et D en fonction de a et b .

3°/ En déduire que :

a) FE = 2OA et que (OA) $\perp$ (EF)

b) BD = CH et que (BD) $\perp$ (CH)

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/On a : OA = OB et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(A)=B$

On a : OB = OC et $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(B)=C$

On a : OC = OD et $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(C)=D$

2°/

a) On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{O} \Leftrightarrow$ I est le barycentre du système { (A , 3) ; (B , 1)} donc (I) est le barycentre de { (B , 3) ; (C , 1)} car $r(A)$= B et $r(B)$= C (la rotation conserve les barycentres).

D'autre part on a :

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{O} \Leftrightarrow$ J est le barycentre du système { (B ,3) : (C , 1) }

Conclusion : $r(I)$= J (car un système de deux points admet un seul barycentre) .

b) On a : $r(I)$= J et $r(0)=0$ donc OI = OJ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc OIJ est un triangle isocèle rectangle en O .

Solution 2 :

1°/

a) On a : ADBC est un losange .

$r(D) = r_2 \circ r_1(D)$

On a : $r_1(D)$ = B car AD = AB et $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$r_2(B)$= B donc $r(D) = r_2 \circ r_1(D) = r_2(B)$ = B .

$r(B) = r_2 \circ r_1(B) = r_2(r_1(B))$

Or $r_1(B) =$ C car AB = AC et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc $r(B) = r_2(C) =$ A car BC = BA et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc $r(B) =$ A

b) r est la composé de deux déplacements donc r est un déplacement . Soit θ une mesure de son angle .

$\theta \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$ donc r est uen symétrie centrale .

Comme $r(D) =$ B alors le centre de r est B * D = Ω

Conclusion : $r = S_\Omega$

c) On a : $r(M) = r_2 \circ r_1(M) = r_2(N) = M'$ donc Ω = M * M' .

2°/

a) On a : $r_1(A) =$ A et $r_1(M) =$ N donc AM = AN et

$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc AMN est un triangle équilatéral .

b) $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{M'\Omega}) + (\overrightarrow{M'\Omega},\overrightarrow{MA})[\pi]$

Or $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{M'\Omega}) \equiv \pi[2\pi]$ car Ω = M * M' donc

$(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{M'\Omega}) \equiv 0[\pi]$

D'où $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{M'\Omega},\overrightarrow{MA})[\pi] \equiv (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA})[\pi]$ car Ω , M' , N et M sont alignés .

D'où $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$ car AMN est un triangle équilatéral de sens direct .

Solution 3:

1°/

a) $T(A) = R_B \circ R_A^{-1}(A) = R_B(A) = C \Rightarrow R(B, \frac{\pi}{2})(A) = C$

b) T est la composé de deux déplacement don cT est un déplacement . Soit α une mesure de son angle .

On a : $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})\,[2\pi] \equiv 0\,[2\pi]$

Donc T est une translation qui transforme A en C donc $T = t_{\overrightarrow{AC}}$.

c) On a : $R_A(M) = M_1$ donc $R_A^{-1}(M_1) = M$ d'où

$T(M_1) = R_B(R_A^{-1}(M_1)) = R_B(M) = M_2$ d'où $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$ et par suite M_1M_2CA est un parallélogramme .

2°/ a) On a $M_2 = R_B(M)$.

Lorsque M décrit le cercle Γ , de diamètre [AB] alors M_2 décrit le cercle Γ_2 image de Γ par R_B . Γ_2 est le cercle de diamètre [A'B']
où $A' = R_B(A)$ et $B' = R_B(B)$
or $R_B(A) = C$ et $R_B(B) = B$
conclusion : Γ_2 est le cercle de diamètre [BC] .

b) Dans le triangle ABC on a : $\omega_1 = A * B$ et $\omega_2 = B * C$

D'où $\overrightarrow{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (d'après le théorème des milieux)

c) On a : $I = M_1 * M_2$ donc $\overrightarrow{IM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}$

Or $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$ (d'après 1°/ c)) d'où $\overrightarrow{M_2I} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\omega_2\omega_1}$

Et par suite I est l'image de M_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega_2\omega_1}$.

D'autre part : M_2 décrit le cercle Γ_2 de diamètre [BC] or $\omega_2 = B * C$ donc ω_2 est le centre de Γ_2 .

Et comme $t_{\overrightarrow{\omega_2\omega_1}}(\omega_2) = \omega_1$ alors I décrit le cercle de centre ω_1 et de même rayon que Γ_2 .

Γ et Γ_2 ont le même rayon donc I décrit le cercle de diamètre [AB] .

Conclusion : I décrit le cercle Γ .

Solution 4:

1°/ $S_{(AB)}$ transforme le triangle AKB en AIB or
AKB est un triangle rectangle en K et $S_{(AB)}(K) = I$
alors AIB est un triangle rectangle en I .
d'où $(AI) \perp (BI)$.

on a : $S_{(AC)}$: $A \to A$
$K \to J$
$C \to C$

AKC étant un triangle rectangle en K et $S_{(AC)}$ conserve l'orthogonalité alors le triangle AJC est rectangle en J d'où $(CJ) \perp (AJ)$.

2°/ $S_2 \circ S_1$ est la composé de deux symétries orthogonales dont les axes sont sécants en A d'où $S_2 \circ S_1$ est une rotation de centre A .
Soit α une mesure de son angle .

on a : $\alpha \equiv 2\,\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\,[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

donc $S_2 \circ S_1$ est une asymptote centrale de cantre A .
$S_2 \circ S_1(I) = S_2[\,S_1(I)] = S_2(\,K) = J$ or $S_2 \circ S_1 = S_A$ d'où $A = I * J$.

3°/on a : $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$ et $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{AK}{CK}$ et par suite 2AK = CK

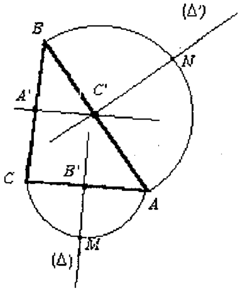
d'autre part : IJ = 2AI car A = I * J
= 2AK car la symétrie $S_{(AB)}$ conserve les distances .
d'où IJ = CK . Or CK= CJ (car la symétrie d'axe (AC) conserve les distances) d'où IJ = CJ .

Solution 5 :

1°/

$$\begin{cases} MA = MC \\ (\overrightarrow{MA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{MC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow M \in D \cap \mathscr{C}$$

où D est la médiatrice de $[AC]$ et $\mathscr{C}$ l'arc du cercle de diamètre $[AC]$ ne contenant pas B, privé de A et C. D'où la construction.



$$\begin{cases} NA = NB \\ (\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NA}) \not\equiv \dfrac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow M \in D' \cap \mathscr{C}'$$

où $D' = med[AB]$ et $\mathscr{C}'$: l'arc du cercle de diamètre $[AB]$ ne contenant pas C, privé de A et B, d'où la construction

2°/ a) On a : $A' = B*C$ et $C' = A*B$ donc d'après Thalès :

$A'C' = \dfrac{AC}{2}$ or $\dfrac{AC}{2} = B'M$ car M est un point du cercle de diamètre $[AC]$ d'où $A'C' = B'M$

de même on a : $A' = C*B$ et $B' = C*A$ donc $A'B' = \dfrac{AB}{2}$

or $\dfrac{AB}{2} = C'N$ d'où $A'B' = C'N$

b) On a : $A'C' = B'M$ donc il existe un unique déplacement qui transforme M en A' et B' en C' et comme $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'M}) \equiv 0\ (\pi)$ donc ce déplacement est une rotation r. L'angle de r est

$\theta \,/\, \theta \equiv (\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{C'A'})\ (2\pi)$

or $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AB'}$ (théorème des milieux)

d'où $\quad \theta \equiv (\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{AB'})\ (2\pi)$

$\qquad \theta \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Conclusion : r est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

3°/ a)On a : $A'B' = C'N$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'N}) \not\equiv 0(\pi)$

donc il existe une unique rotation r' telle que :

$r'(A') = N$ et $r'(B') = C'$.

l'angle de r' est θ'tel que $\theta' \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{NC'}})\ (2\pi)$

or $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{CA}$ (théorème des milieux)

$\Rightarrow \theta' \equiv (\widehat{\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{NC'}})\ (2\pi) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

donc r' est la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et puisque $r'(B') = C'$

alors $r' = r$ d'où $r(A') = N$.

b) r est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ donc $r \circ r$ est une rotation d'angle

$\pi \Rightarrow r \circ r$ est une symétrie centrale S_I cherchons son centre I.

on a : $r \circ r(M) = r(A') = N \Rightarrow S_I(M) = N \Leftrightarrow I = M * N$

Conclusion : $r \circ r = S_I$ où $I = M * N$

Soit Ω le centre de r, on a :

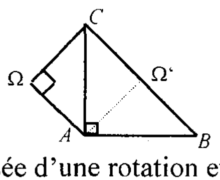
$r(\Omega, -\dfrac{\pi}{2}) \circ r(\Omega, -\dfrac{\pi}{2}) = r(\Omega, \pi) = S_I$ d'où $\Omega = I$

donc le centre de r est $I = M * N$

c) On a : $r(A') = N$ et $r(M) = A' \Rightarrow \begin{cases} A'M = A'N \\ (\widehat{\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'N}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$

donc le triangle $MA'N$ est isocèle rectangle en A'.

Solution 6 :



1°/ * $r \circ t$ est la composée d'une rotation et d'une translation donc c'est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (même angle que r).

Déterminons son centre Ω.

On a : $r \circ t(A) = r(B) = C$

$\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ (\overrightarrow{\Omega A}, \widehat{\ }\overrightarrow{\Omega C}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi) \end{cases}$ d'où ΩAC est un tirangle isocèle rectangle en Ωet de sens direct.

* $t \circ r$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre Ω'

on a : $t \circ r(A) = t(A) = B$ d'où $\Omega' AB$ est un triangle isocèle rectangle en Ω' et de sens direct. ($\Omega' = B * C$)

2°/ $M_1 = r \circ t(M)$; $M_2 = t \circ r(M)$

Soit $r \circ t = f$; $t \circ r = g$

on a : $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$ d'où

$M_2 = g \circ f^{-1}(M_1)$ car $f^{-1}(M_1) = M$

or $g \circ f^{-1} = R(\Omega', \dfrac{\pi}{2}) \circ R(\Omega, -\dfrac{\pi}{2}) = T_{\vec{u}}$

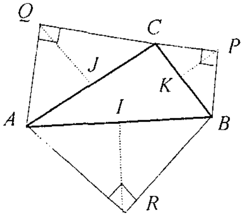
car $\dfrac{\pi}{2} + -\dfrac{\pi}{2} \equiv 0\,(2\pi)$

or $T_{\vec{u}}(C) = g \circ f^{-1}(C) = g(A) = B$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$

$M_2 = g \circ f^{-1}(M_1) \Rightarrow M_2 = T_{\vec{u}}(M_1) \Rightarrow \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{CB}$

d'où BCM_1M_2 est un parallélogramme.

Solution 7 :



1°/ a) $r_P \circ r_Q = R(P, \dfrac{\pi}{2}) \circ R(Q, \dfrac{\pi}{2})$

on a : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \equiv \pi \ (2\pi)$

d'où $r_P \circ r_Q$ est une symétrie centrale de centre ω

de plus an a : $r_P \circ r_Q(A) = r_P(C) = B$ d'où $S_\omega(A) = B$ et par suite

$\omega = A*B = I$

Conclusion : $r_P \circ r_Q = S_I$

b) $r_P \circ r_Q(Q) = S_I(Q)$

$r_p(Q) = S_I(Q)$ on note $Q' = S_I(Q)$

d'où $r_P(Q) = Q'$ et par suite $\begin{cases} PQ = PQ' \\ et \\ (\overrightarrow{PQ}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{PQ'}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \end{cases}$

d'où PQQ' est un triangle isocèle rectangle en P.

or $I = Q*Q'$ d'où IPQ est un triangle isocèle en I.

2°/ a) * $r_Q \circ r_R = R(Q, \frac{\pi}{2}) \circ R(R, \frac{\pi}{2})$ on a : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \equiv \pi \ (2\pi)$

d'où $r_Q \circ r_R$ est une symétrie centrale de centre ω'

or $r_Q \circ r_R(B) = r_Q(A) = C$ d'où $S_{\omega'}(B) = C$ et par suite $\omega' = B*C$

Conclusion : $r_Q * r_R = S_K$

* $r_R * r_P = R(R, \frac{\pi}{2}) \circ R(P, \frac{\pi}{2})$ on a : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \equiv \pi \ (2\pi)$

d'où $r_R \circ r_P$ est une symétrie centrale de centre ω'' or

$r_R \circ r_P(C) = r_R(B) = A$ d'où $\omega'' = C*A$

$r_R \circ r_P = S_J$

b) On a : $r_Q \circ r_R = S_K$ d'où KQR est un triangle isocèle rectangle en K

(même raisonnement que dans 1°/ -b).

$r_R \circ r_P = S_J \Rightarrow JPR$ est un triangle isocèle rectangle en J.

3°/ on a : $R(I,\frac{\pi}{2})(P) = Q$

$R(I,\frac{\pi}{2})(A) = R$

donc $(AP) \perp (QR)$

on a : $R(J,\frac{\pi}{2})(R) = P$ $\quad R(J,\frac{\pi}{2})(C) = Q$

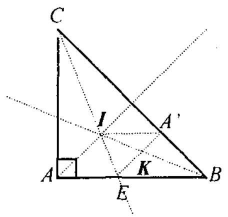
donc $(RC) \perp (PQ)$

on a : $R(K,\frac{\pi}{2})(Q) = R$ $\quad R(K,\frac{\pi}{2})(B) = P$ donc $(QB) \perp (RP)$

(AP); (RC) et (QB) sont les hauteurs du triangle PQR et par suite (AP), (RC) et (QB) sont concourantes. leur point d'intersection est l'orthocentre du triangle PQR.

Solution 8 :

1°/ a)



$$R_{C}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} CA = CA' \\ et \\ (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$$

d'où la construction du point A' $\{A'\} = \mathscr{C}(C, CA) \cap [CB)$

b) $R_C \circ R_A = S_{(CI)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AI)}$

car

$(CI) \cap (CA) = \{C\}$; $(CA) \cap (AI) = \{A\}$

$2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$; $2(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

d'où $R_C \circ R_A = S_{(CI)} \circ S_{(AI)} = R(I, \dfrac{3\pi}{4})$

c) on a : $R_C \circ R_A(I) = I$ $R_C \circ R_A(A) = A'$ d'où $IA = IA'$

$(\widehat{\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{AB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA}}) + (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}})\ (\pi)$

or $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ car $R(I, \dfrac{3\pi}{4})(A) = I'$

$(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}) + \pi\ (2\pi) \equiv -\dfrac{\pi}{4} + \pi\ (2\pi) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{AB}}) \equiv 0\ (\pi)$

Conclusion : $(IA') // (AB)$

2°/ a) on a : $(IA') // (EB)$ $(A'B) \cap (EI) = \{C\}$

d'où il existe une unique homothétie h de centre C transformant E en I et B en A' son rapport est $k = \dfrac{IA'}{EB} = \dfrac{CA'}{CB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d'où $h = h(C, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = h_C$ et par suite $h_c(B) = A'$ et $h_C(E) = I$ d'où

$\overrightarrow{A'I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{BE}$

Conclusion : $\overrightarrow{BE} = -\sqrt{2}\, \overrightarrow{IA'}$

b) $h_K \circ h_C (B) = h_k(A') = E$

car $\dfrac{\overline{KE}}{\overline{KA'}} = \dfrac{\overline{KB}}{\overline{KI}} = \dfrac{\overline{EB}}{\overline{A'I}} = -\sqrt{2}$ (théorème de Thalès)

3°/ $h_K \circ h_C$ est la composée de deux homothétie dont le produit des rapport est -1. donc $h_K \circ h_C$ est une symétrie centrale et comme $h_K \circ h_C$ (B) = E alors $h_K \circ h_C$ est une symétrie centrale de centre B * E = M

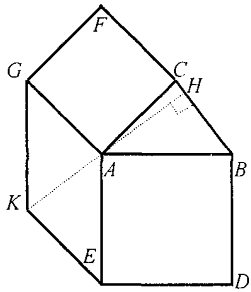
$h_K \circ h_C = S_M \quad \Rightarrow \quad h_K \circ h_C(C) = S_M(C)$

$\Rightarrow h_K(C) = S_M(C)$ soit $C' = S_M(C)$

$\overrightarrow{KC'} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{KC} \quad \Rightarrow \quad K \in (CC')$ *or* (CC') = (MC) d'ou $K \in (MC)$

Conclusion : K,M,C sont alignés

Solution 9 :



1°/ a)

* $AB = GK$ alors il existe un unique déplacement f tel que:

$f(A) = G$; $f(B) = K$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}})\ (2\pi) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

f est un déplacement d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ donc f une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

* $AC = GA$ alors il existe un unique déplacement f_1 tel que

$f_1(A) = G$ et $f_1(C) = A$ $\qquad (\overrightarrow{AC}, \widehat{\overrightarrow{GA}}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

f_1 est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

f et f_1 sont deux rotations de même angle et vérifiant

$f(A) = f_1(A) = G$ d'où $f = f_1$

Conclusion : il existe un unique déplacement f transformant A en

G; B en K et C en A

f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω.

$\begin{cases} \Omega A = \Omega G \\ \Omega C = \Omega A \end{cases} \Rightarrow \Omega$ est le centre du carré $ACFG$

d'où $f = R(\Omega, -\frac{\pi}{2})$

b) on a : $\begin{array}{l} B \xrightarrow{f} K \\ C \xrightarrow{f} A \end{array}$ d'où $(AK) \perp (BC)$

or $(AH) \perp (BC)$ d'où (AH) et (AK) sont parallèles d'où A, H, K sont alignés.

On a : $f(A) = G$; $M = B * C$

$f(M) = f(B) * f(C) = K * A = P$

$(AM) \perp (GP)$

or $P = K * A = E * G$ car $AGKE$ est un parallélogramme.

d'où $(GP) = (EG)$

Conclusion : $(AM) \perp (EG)$

2°/ a) $f(B) = K$

$$f(F) = C \text{ car } (\widehat{\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega C}}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ et } \Omega F = \Omega C$$

d'où $BF = CK$

b) $(\widehat{\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CK}}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ car f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3°/ a) on a : $EA = AB$ car ($AEDB$ est un carré) d'où il existe un unique déplacement g tel que $g(A) = E$ et $g(B) = A$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow g$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$EK = AC$ alors il existe un unique déplacement g_1 tel que:

$g_1(A) = E$ et $g_1(C) = K$

$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

g et g_1 sont deux rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et en plus

$g(A) = g_1(A)$ d'où $g = g_1$

Conclusion : il existe un unique déplacement g transformant ABC en EAK.

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $g = R(\Omega', \frac{\pi}{2})$

or $\Omega' A = \Omega' E$; $\Omega' B = \Omega' A$ d'où Ω' est le centre du carré $AEDB$.

b) on a : $\begin{cases} \Omega' D = \Omega' B \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega' D}, \overrightarrow{\Omega' B}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où $g(D) = B$ or $g(C) = K$

$\begin{cases} g(D) = B \\ g(C) = K \end{cases} \Rightarrow DC = BK$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BK}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

4°/ on a : $(AK)\perp(BC)$ d'où (AK) est la hauteur du triangle (KBC) issue du point K.

on a : $(FB)\perp(CK)$ d'où (FB) est la hauteur du triangle KBC issue du point B.

on a : $(DC)\perp(BK)$ d'où (DC) est la hauteur du triangle KBC issue du point C.

Conclusion : (AK), (BF) et (CD) sont les hauteurs du triangle KBC

donc elles sont concourantes au point I orthocentre du triangle KBC.

g et g_1 sont deux rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et en plus

$g(A) = g_1(A)$ d'où $g = g_1$

Conclusion : il existe un unique déplacement g transformant ABC

en EAK.

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $g = R(\Omega', \frac{\pi}{2})$

or $\Omega'A = \Omega'E$; $\Omega'B = \Omega'A$ d'où Ω' est le centre du carré $AEDB$.

b) on a : $\begin{cases} \Omega'D = \Omega'B \\ (\overrightarrow{\Omega'D}, \overrightarrow{\Omega'B}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$ d'où $g(D) = B$

or $g(C) = K$

$\begin{cases} g(D) = B \\ g(C) = K \end{cases} \Rightarrow DC = BK$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BK}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

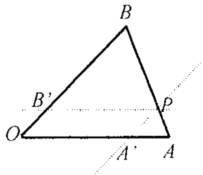
4°/ on a : $(AK)\perp(BC)$ d'où (AK) est la hauteur du triangle (KBC) issue du point K.

on a : $(FB)\perp(CK)$ d'où (FB) est la hauteur du triangle KBC issue du point B.

on a : $(DC)\perp(BK)$ d'où (DC) est la hauteur du triangle KBC issue du point C.

Conclusion : (AK), (BF) et (CD) sont les hauteurs du triangle KBC donc elles sont concourantes au point I orthocentre du triangle KBC.

Solution 10 :



1°/ On $OA = OB$ donc il existe un unique déplacement r tel que $r(O) = B$ et $r(A) = O$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO}) \not\equiv 0\ (2\pi)$ donc r est une rotation d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO})$.

2°/ on a : $(OA')//(B'P)$ et $(OB')//(A'P)$ donc $(OA'PB')$ est un parallélogramme .

on a : $OA' = B'P$ et $B'P = B'B$ car $B'PB$ est un triangle isocèle en B'. d'où $OA' = BB'$

alors il existe un unique déplacement r_1 / $r_1(O) = B$ et $r_1(A') = B'$

$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{BB'}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO})\ (2\pi)$

r et r_1 sont deux rotations de même angle et vérifiant $r_1(O) = r(O)$

alors $r = r_1$ et par suite $r(A') = B'$

Soit Ω le centre de r.

on a : $r(O) = B \Rightarrow \Omega O = \Omega B$

$r(A) = O \Rightarrow \Omega A = \Omega O$

donc $\Omega O = \Omega B = \Omega A$ donc Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

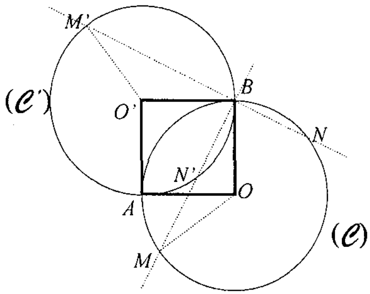
3°/ on a : $r(A') = B'$ donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO}})\ (2\pi)$

or $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{B'O}})\ (2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}}) + \pi\ (2\pi)$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}}) + \pi\ (2\pi)$

et par suite $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}})\ (\pi)$ et comme $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \not\equiv 0\ (\pi)$ alors les quatres points : O, A', B' et Ω sont cocycliques.

Solution 11 :



1°/ On a : $OM = O'M'$ donc il existe un unique déplacement r tel que $r(O) = O'$ et $r(M) = M'$ et comme $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc r est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit Ω le centre de r. $r(O) = O' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega O = \Omega O' \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ le triangle $\Omega OO'$ est un triangle rectangle isocèle rectangle en Ω et de sens indirect.

or le seul triangle isocèle rectangle et de sens indirect dont un côté est $[OO']$ est BOO' d'où $\Omega = B$

Conclusion : il existe une seule rotation c'est $r(B, -\frac{\pi}{2})$ transformant O en O' et M en M'.

2°/ $(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BN'}) \equiv (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{BM})\ (2\pi) \equiv -(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{M'B})\ (2\pi)$

$\equiv -\left[(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) + (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{M'B})\right] (2\pi)$

$$\equiv -(-\frac{\pi}{2} + \pi)\ (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

$BM'N'$ est un triangle rectangle en B inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$ donc $[M'N']$ est un diamètre d'où $O' = M' * N'$

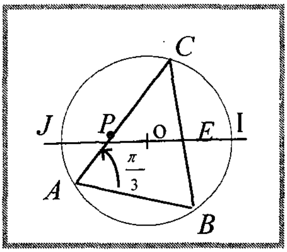
BMN est un triangle rectangle en B inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ donc $[MN]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ donc $M * N = O$

$M * N = O \Rightarrow r(M) * r(N) = r(O) \Rightarrow M' * r(N) = O'$

or $M' * N' = O'$ d'où $r(N) = N'$

Solution 12 :

1°/ a)



b) On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

donc $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ (2\pi)$

Donc l'ensemble E_1 des points M tels que $(\overrightarrow{MB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ est l'arc $[BC]$ contenant A du cercle $\mathscr{C}$ privé de B et C.

c) l'ensemble E_2 des points M tels que $(\overrightarrow{MB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et

$MB < MC$ est l'arc $[BJ]$ contenant A privé de B et J car :

$E_2 = E_1 \cap \mathscr{P}_1$ où $\mathscr{P}_1$ est le demi-plan de frontière (IJ) contenant B.

2°/ a) On a : $AB = PC$ donc il existe un déplacement unique qui transforme A en P et B en C, et puisque

$$(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{PC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{AC})\,(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

donc ce déplacement n'est autre que la rotation R d'angle $\frac{\pi}{3}$ telle que

$R(A) = P$ et $R(B) = C$.

b) Soit Ω le centre de R. On a : $R(B) = C \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

or $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{\Omega C}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{AC})\,(2\pi) \Rightarrow \Omega \in E_1 \Rightarrow \Omega \in \mathscr{C}$.

D'autre part on a : $\Omega \in med[CB]$

or $med[CB] = (OE)$ d'où $\Omega \in \mathscr{C} \cap (OE)$

d'où $\Omega = J$ ou $r = I$ or Ω est un point de l'arc $[BC]$ de $\mathscr{C}$ contenant A donc $\Omega = J$

Conclusion : R est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) on a : $R(A) = P \Leftrightarrow \begin{cases} JA = JP \\ (\overrightarrow{JA}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{JP}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ le triangle JAP est équilatéral de sens direct.

3°/ On a : $JB = JC$

J est un point de l'ensemble des points M vérifiant :

$(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et $JB = JC$ d'où $R(B) = C$

d'où $R \circ S_B(B) = C$

$1^{ére}$ Méthode :

* $R \circ S_B = R(J, \frac{\pi}{3}) \circ R(B, \pi)$

donc $R \circ S_B$ est une rotation d'angle $\theta \equiv \frac{\pi}{3} + \pi\ (2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$

On a : $(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}}) \equiv \pi - (\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}}) (2\pi)$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$

$\begin{cases} IC = IB \\ et \\ (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$ d'où $R(I, -\frac{2\pi}{3}) (B) = C$

$R(I, -\frac{2\pi}{3})$ et $R \circ S_B$ sont deux rotations de même angle,

transformant de la même façon le point B en C.

d'où $R \circ S_B = R(I, -\frac{2\pi}{3})$

<u>2ème méthode</u> : Utilisation de la décomposition d'une rotation en deux symétries orthogonales d'axes sécants :

on a : $R \circ S_B = R(J, \frac{\pi}{3}) \circ R(B, \pi) = S_\Delta \circ S_{(BJ)} \circ S_{(BJ)} \circ S_{\Delta'}$

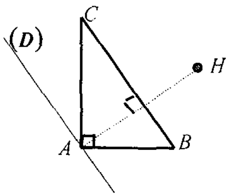
Où Δ' est la droite passant par B telle que $(\widehat{\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{\Delta'}}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi) \Rightarrow \Delta' \perp (BJ)$ et passant par J.

d'où $\Delta' = (BI)$ donc $R \circ S_B = S_D \circ S_{(BI)}$

d'autre part $R \circ S_B(B) = C \Rightarrow S_\Delta(B) = C \Rightarrow D = med[BC] = (JI)$

$$\Rightarrow R \circ S_B = S_{(JI)} \circ S_{(BI)} = R(I, 2(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ}})) = R(I, -\frac{2\pi}{3}).$$

Solution 13 :



1°/ f est la composée d'un nombre impair d'antidéplacements, donc f est un antidéplacement.

2°/ Il suffit de montrer que f n'a pas de point invariant.

Soit $Invf$ l'ensemble des points invariants par f.

si $Invf \neq \phi$ alors $f = S_\Delta$

d'où $S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_\Delta$ soit $H = S_{(BC)}(A)$

on a : $S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}(A) = S_\Delta(A)$; $S_\Delta(A) = H$

d'où Δ est la médiatrice de $[AH]$ d'où $\Delta = (BC)$

$\Rightarrow S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)}$ d'où $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = id_P$

or $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = R(A, 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})) = S_A$

Conclusion : $Invf = \phi$ d'où f est une symétrie glissante.

On a : $f = s_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ R(A, \pi)$

$= S_{(BC)} \circ S_D \circ S_{(AH)}$ où D est la droite passant par A et perpendiculaire à (AH) $f = T_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AH)}$

Solution 14 :

1°/On a : $f(A) = D$ et $f(D) = C$

f étant un antidéplacement donc f est soit une symétrie orthogonale , soit une symétrie glissante .

Supposons que f est une symétrie orthogonale alors $f = S_\Delta$.

On a : S_Δ (A) = D donc S_Δ (D) = A or S_Δ (D) = C ce qui est absurde

donc $f \neq S_\Delta$ et par suite f est une symétrie glissante .

2°/ $A \xrightarrow{f} D$

$D \xrightarrow{f} C$

$C \xrightarrow{f} E$

On a : ADC est un triangle isocèle rectangle en D donc DA = DC et

$(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} [2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$ car un antidéplacement transforme les mesures des angles en leurs opposés .

Donc DEC est un triangle isocèle rectangle en E .

b) On a : CD = CE et CD = CB donc CE = CB

On a : (CD) $\perp$ (CB) et (CB) $\perp$ (CE) donc (CB) // (CE)

Donc C = E * B d'où la construction du point E .

c) $A \xrightarrow{f} D$

$D \xrightarrow{f} C$

$B' \xrightarrow{f} B'$

On a : ABD est un triangle isocèle rectangle en A de sens direct donc son image DB'C par f est un triangle en D et de sens indirect .

D'où la construction du point B' (voir figure) .

3°/ $f = S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ .

On a : $f \circ f = T_{2\vec{u}}$, d'autre part : $f \circ f(A) = f(f(A)) = f(D) = C$

Donc $T_{2\vec{u}}$ (A) = C et par suite $2\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ d'où $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$.

On a : $S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = f$ donc $S_\Delta \circ T_{\vec{u}}$ (A) $= f(A) \Rightarrow S_\Delta$ (O) = D (car

$T_{\vec{u}}$ (A) = O) d'où Δ est la médiatrice de [OD] .

Conclusion : la forme réduite de f est : $S_\Delta \circ T_{\overrightarrow{AO}} = T_{\overrightarrow{AO}} \circ S_\Delta$ où Δ est la médiatrice de [OD] .

4°/ $\varphi_1 = f \circ S_{AD}$ est la composée de deux antidéplacements alors φ_1 est un déplacement. On a : $\varphi_1(D) = f \circ S_{AD}(D) = f(S_{AD}(D)) = f(D) = C$

Soit θ_1 est une mesure de son angle .

$$\theta_1 \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}})\ [2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) + \pi\,[2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{2}\,[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2}\,[2\pi]$$

Donc φ_1 est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$. Soit Ω_1 son centre donc

$$\begin{cases} \Omega_1 A = \Omega_1 D \\ et \\ \Omega_1 D = \Omega_1 C \end{cases}$$

Donc Ω_1 est le point d'intersection des deux médiatrices des segments [AD] et [DC] d'où $\Omega_1 = O$

Conclusion : $\varphi_1 = R(O, \frac{-\pi}{2})$.

Solution 15:

1°/

a) $3^3 - (2+4i).3^2 - (9-10i).3 + 18 + 6i = 0$ donc 3 est une racine de €.

b) $\forall z \notin \mathbb{C}$, on a :

$z^3 - (2+4i)z^2 - (9-10i)z + 18 + 6i = (z-3)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$

D'où $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -2 - 4i \\ c - 3b = -9 + 10i \\ -3c = 18 + 6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 4i \\ c = -6 - 2i \end{cases}$

Donc l'équation (E) s'écrit : $(z-3)(z^2 + (1-4i)z - 6 - 2i) = 0$

$\Leftrightarrow$

$z = 3$ ou $z^2 + (1-4i)z - 6 - 2i = 0$

$\Delta = (1-4i)^2 + 24 + 8i = 9$ d'où $z' = -2 + 2i$ et $z'' = 1 + 2i$

D'où $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -2 + 2i$.

2°/ $z_A = 3$; $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = -2 + 2i$

a) on a : $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = 3$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = 3$

donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ et par suite OABC est un parallélogramme .

b) on a : OA = BC car $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ don c il existe un unique

déplacement f tel que $\begin{cases} f(O) = B \\ f(A) = C \end{cases}$ et il existe un unique

antidéplacement g tel que : $\begin{cases} g(O) = B \\ g(A) = C \end{cases}$

3°/ f étant un déplacement , soit α une mesure de son angle :

$\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$

$\equiv \pi[2\pi]$ donc f est une symétrie centrale et comme f (O) = B alors

O * B est le centre de f

Conclusion : f est la symétrie centrale de cenre K d'affixe $\frac{1}{2} + i$

($z_K = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{1}{2} + i$) .

4°/ $f \circ S$ est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c'est un antidéplacement.

$f \circ S(O) = f\,[S(O)] = f\,(O) = B = g(O)$

$f \circ S(A) = f\,[S(A)] = f\,(A) = C = g(A)$

$f \circ S$ et g sont deux antidéplacements qui transforment les points O et A de la même manière alors $f \circ S = g$

Solution 16:

1°/ $z' = x' + iy' = 1 - y + ix = 1 + i(x + yi) = 1 + iz$.

on a : $z' = iz + 1$.

r transforme chaque point M d'affixe z en un point M' d'affixe $z' = iz + 1$

c'est la forme $z' = az + b$ avec $a = i = [1 ; \frac{\pi}{2}]$ et $b = 1$.

donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A .

soit z_A l'affixe de A .

on a : r(A) = A alors $z_A = iz_A + 1$ d'où $z_A = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

conclusion : r est une rotation de centre $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2°/ On a : r(M) = M' donc AM = AM' et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc

AMM' est un triangle isocèle et rectangle en A .

3°/ f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc f est un antidéplacement .

Soit M' = f (M) : M' = r ° S_Δ(M) . On pose $M_1 = S_\Delta(M)$.

Soit M(x , y) $\Rightarrow M_1$ (- x , y) d'où M' (1 – y , -x) d'où :

$$f \ : \begin{cases} P \to P \\ M(x,y) \to M'(x',y') / \begin{cases} x' = 1-y \\ y' = -x \end{cases} \end{cases}$$

Supposons que f admet un point invariant M(x , y) on a : f (M) = M donc

$$\begin{cases} x = 1-y \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Donc f est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants alors f est ue symétrie glissante

$f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D .

On a : $f \circ f = t_{2\vec{u}}$

$f \circ f$ (O) = f [f (O)] = O_2 avec O_1 (1,0) et O_2 (1,-1)

D'où $\overrightarrow{OO_2} = 2\vec{u} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Cherchons l'axe D de f :

On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D . Pour déterminer D , il suffit de déterminer un point de D .

On a : f (O) = O_1 donc O* $O_1 \in$ D .

Soit $I = O * O_1 \Rightarrow I(\frac{1}{2},0)$ d'oùD est la droite passant par $I(\frac{1}{2},0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$

$D : x + y - \frac{1}{2} = 0$.

Solution 17 :

1°/

a) $R_2 \circ R_1 (A) = R_2(B) = C$.

On a : $\begin{cases} O_1A = O_1B \\ \left(\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_1B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow R_1(A) = B$

On a : $\begin{cases} O_2B = O_2C \\ \left(\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow R_2(B) = C$

- $R_3 \circ R_2(B) = R_3(C) = D$
- $R_4 \circ R_3(C) = R_3(D) = A$

b) $R_2 \circ R_1$, $R_3 \circ R_2$ et $R_4 \circ R_3$ sont toutes les trois composés de deux déplacements donc elles sont des déplacements , de même angle $\alpha \equiv \pi[2\pi]$ et par suite elles sont des symétries centrales .

$R_2 \circ R_1 (A) = C$ donc $R_2 \circ R_1 = S_\omega$ ($\omega = A*C$)

$R_3 \circ R_2(B) =$ D donc $R_3 \circ R_2 = S_\omega$ ($\omega = B*D$)

$R_4 \circ R_3 (C) = A$ donc $R_4 \circ R_3 = S_\omega$

Conclusion : $R_2 \circ R_1 = R_3 \circ R_2 = R_4 \circ R_3 = S_\omega$

2°/

a) $R_3(R_2(O_1)) = R_3 \circ R_2 (O_1) = R_2 \circ R_1(O_1) = R_2(R_1(O_1)) = R_2(O_1)$.

$R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1) \Rightarrow R_2(O_1)$ st un point invariant par R_3 . Or le suel point invariant par R_3 et O_3 d'où $R_2(O_1) = O_3$.

$f\ (O_1) = R_2 \circ R_1\ (\ O_1) = R_2(O_1) = O_3$.

b) On a : $R_4 \circ R_3\ (O_2) = R_3 \circ R_2\ (O_2) = R_3(O_2) \Rightarrow R_4[R_3(O_2)] = R_3(O_2)$

$R_3(O_2)$ ets un point invariant de R_4 donc $R_3(O_2) = O_4$.
$f\ (O_2) = R_3 \circ R_2(O_2) = R_3(O_2) = O_4$.
c) On a : $f\ (O_1) = O_3 \Rightarrow S_\omega(O_1) = O_3 \Rightarrow \omega = O_1 * O_3$
$f\ (O_2) = O_4 \Rightarrow S_\omega(O_2) = O_4 \Rightarrow \omega = O_2 * O_4$ donc $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme .

D'autre part $R_2(O_1) = O_3 \Rightarrow \begin{cases} O_2O_1 = O_2O_3 \\ et \\ \left(\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_3}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $O_1O_2O_3O_4$ est un carré .

3°/

a) $g(A) = R_2 \circ S_\Delta(A) = R_2(B) = C$

$g(O_1) = R_2 \circ S_\Delta(O_1) = O_3$ (car $O_1 \in \Delta$)

b) g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc g ets un antidéplacement donc g est soit uensymétrie orthogonale , soit une symétrie glissante .

Si g est une symétrie orthogonale alores il existe une droite D_1 telle que $g = S_{D_1}$

on a :

- $S_{D_1}(A) = C \Rightarrow D_1$ est la médiatrice de [AC]
- $S_{D_1}(O_1) = O_3 \Rightarrow D_1$ est la médiatrice de $[O_1O_3]$

Et par suite $\begin{cases} D_1 \perp (AC) \\ et \\ D_1 \perp (O_1O_3) \end{cases} \Rightarrow (AC)//(O_1O_3)$

Or $\omega \in (O_1O_3) \cap (AC) \Rightarrow (O_1O_3) = (AC) \Rightarrow O_1 \in (AC)$ ce sui est impossible.

Conclusion : g n'est pas une symétrie orthogonale donc g est uen symétrie glissante.

c) $\omega' = g(\omega) = R_2 \circ S_\Delta(\omega) = R_2(\omega_1)\, où\ \omega_1 = S_\Delta(\omega)$

$R_2(\omega_1) = \omega' \Leftrightarrow \begin{cases} O_2\omega_1 = O_2\omega' \\ et \\ \left(\overrightarrow{O_2\omega_1}, \overrightarrow{O_2\omega'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Il existe un unique vecteur $\vec{u}$ et ue seule droite D tel que :

$g = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ *où* $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

g= $g(A) = C \Rightarrow A * C$ appartient à D $\Rightarrow$ $\omega \in$ D.

$g(\omega)=\omega' \Leftrightarrow t_{\vec{u}} \circ S_D(\omega) = \omega' \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(S_D(\omega)) = \omega' \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{\omega\omega'}$

D est la droite passant par ω et de vecteur directeur $\overrightarrow{\omega\omega'}$ donc D = $(\omega\omega')$.

Conclusion : $g = t_{\overrightarrow{\omega\omega'}} \circ S_{(\omega\omega')} \circ t_{\overrightarrow{\omega\omega'}}$.

Solution 18 :

1°/ On a : $z' = az + b$ avec $a = -e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b = i$ on a : $a \neq 1$ et $|a| = 1$ donc f est une rotation de centre Ω et d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a)\ (2\pi)$.

$$* \ \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{i}{e^{i\frac{\pi}{3}}(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}})} = \frac{i\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\cos(\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

d'où Ω est d'affixe $e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$* \ a = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}-\pi)} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{3}\,(2\pi)$$

Conclusion : f est une rotation de centre $\Omega(e^{i\frac{\pi}{6}})$ et d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.

2°/ On a : $\forall n \in \mathbf{N}$; $Z_{n+1} = z_{n+1} - e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Or z_{n+1} est l'affixe de $M_{n+1} = f(M_n) \Rightarrow z_{n+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z_n + i$

$$\Rightarrow Z_{n+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z_n + i - e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z_n + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= -e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_n - e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = -e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_n - e^{i\frac{\pi}{6}})$$

Conclusion : $Z_{n+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} Z_n = e^{-i\frac{\pi}{3}} Z_n$

b) $a^p = 1 \Leftrightarrow \left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^p = 1 \Leftrightarrow e^{-i\frac{\pi}{3}p} = 1 \Leftrightarrow p\frac{\pi}{3} \equiv 0\,(2\pi)$

$\Leftrightarrow p\frac{\pi}{3} = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow p = 6k \quad (k \in \mathbf{Z})$

Conclusion : L'ensemble des entiers naturels p tels que

$a^p = 1$ et $\{6k, \quad k \in \mathbf{N}\}$

c) On a : $Z_{n+1} = aZ_n$

$Z_1 = aZ_0$

$Z_2 = aZ_1 = a^2 Z_0$

Démontrons par récurrence que $\forall n \in N;\quad Z_n = a^n Z_0$

$Z_1 = aZ_0$

Supposons que $Z_n = a^n Z_0$ et montrons que : $Z_{n+1} = a^{n+1} Z_0$

On a : $Z_{n+1} = aZ_n = a(a^n Z_0) = a^{n+1} Z_0$

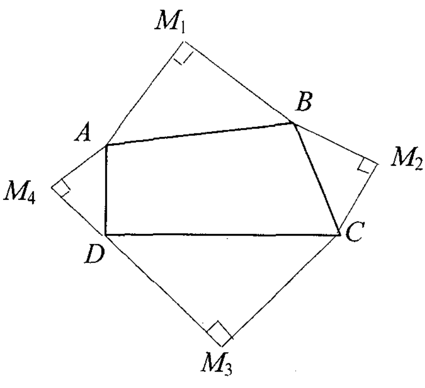
donc $\forall n \in \mathbf{N};\quad Z_n = -e^{i\frac{2\pi}{3}n}(z_0 - e^{i\frac{\pi}{6}})$

or $z_0 = 0 \Rightarrow Z_n = e^{i(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6})}$ donc $\forall n \in \mathbf{N}:\ Z_n = e^{i(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6})}$

On a : $z_n = Z_n + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6})} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 1)$

$$z_{2000} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

Solution 19 :



1°/ Le triangle M_1AB est isocèle rectangle en M_1 de sens

direct. $\Leftrightarrow \begin{cases} M_1A = M_1B \\ (\overrightarrow{M_1A}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{M_1B}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{M_1B}{M_1A} = 1 \\ (\overrightarrow{M_1A}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{M_1B}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1-b}{z_1-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_1-b}{z_1-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi) \end{cases}$$ où z_1 est l'affixe de M_1

$$\Leftrightarrow \frac{z_1-b}{z_1-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_1-b}{z_1-a} = i \Leftrightarrow z_1 = \frac{b-ia}{1-i}$$

Un raisonnement analogue nous conduit à :

$$z_2 = \frac{c-ib}{1-i}\,;\quad z_3 = \frac{d-ic}{1-i}\,;\quad z_4 = \frac{a-id}{1-i}$$

2°/ a) $(\overrightarrow{M_2M_4}, \widehat{\ }\overrightarrow{M_1M_3}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_2}\right)(2\pi)$

$$\equiv \arg\left(\frac{d-ic-b+ia}{a-id-c+ib}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{d-b+i(a-c)}{a-c+i(b-d)}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \arg i\left(\frac{a-c+i(b-d)}{a-c+i(b-d)}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \arg i\,(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$$

Donc $(\overrightarrow{M_2M_4}, \widehat{\ }\overrightarrow{M_1M_3}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi)$ d'où $(M_1M_3) \perp (M_2M_4)$

b) $\dfrac{M_1M_3}{M_2M_4} = \dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|} = \left|\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_2}\right| = |i| = 1$

Donc $M_1M_3 = M_2M_4$

<u>Remarque</u> : Les complexes ont servi dans cet exercice à démontrer un résultat en géométrie plane (voir chapitre similitude).

Solution 20 :

1°/ ABC est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AC}{AB} = 1 \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

Conclusion : ABC est équilatéral de sens direct si et seulement si

$$c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

2°/ ABC est un triangle équilatéral de sens indirect si et seulement si :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\,(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\,(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

Conclusion : ABC est équilatéral de sens indirect si et seulement si

$$c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

3°/ ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ ou

$$c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow \left[(c-a) - e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]\cdot\left[(c-a) - e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right] = 0$$

$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}} - (b-a)(c-a)e^{i\frac{\pi}{3}} + (b-a)^2 = 0$$

$$(c-a)^2-(c-a)(b-a)(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}})+(b-a)^2=0$$

$$(c-a)^2-(c-a)(b-a)+(b-a)^2=0$$

$$c^2-2ac+a^2-cb+ac+ab-\cancel{a}^2+b^2-2ab+\cancel{a}^2=0$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$$

Solution 21 :

1°/ M = B * C d'où $z_M=\dfrac{z_B+z_C}{2}$

et par suite $m=\dfrac{b+c}{2}$

On a : $R(A, \dfrac{-\pi}{2})(B)=B'$ d'où $z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\ z_B+(1-e^{-i\frac{\pi}{2}})\ z_A \Rightarrow$

$b'=-ib+(1+i)a$

$R(A, \dfrac{\pi}{2})(C)=C'$ d'où $z_{C'}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\ z_C+(1-e^{-i\frac{\pi}{2}})\ z_A$

$\Rightarrow c'=-ic+(1+i)a$

2°/ $$\frac{aff\ \overrightarrow{AM}}{aff\ \overrightarrow{B'C'}}=\frac{m-a}{c'-b'}=\frac{\frac{b+c}{2}-a}{ic+(1-i)a+ib-(1+i)a}=\frac{b+c-2a}{2(ic-2ia+ib)}$$

$$=\frac{b+c-2a}{2i(b+c-2a)}=\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2}\in i\,\mathbb{R}$$

D'où $(AM)\perp(B'C')$.

$\dfrac{AM}{B'C'}=\left|\dfrac{m-a}{c'-b'}\right|=\left|\dfrac{-i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ d'où $AM=\dfrac{1}{2}B'C'$

et par suite B'C' = 2 AM .

Solution 22 :

1°/

- On a : $A'=R(O, \dfrac{\pi}{2})(A)$ donc $z_{A'}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\ z_A+(1-e^{-i\frac{\pi}{2}})\ z_O$

Or $z_{A'}=z'_1$, $z_A=z_1$ et $z_O=0$ d'où $z'_1=iz_1$.

• $B' = R\left(O, \frac{-\pi}{2}\right)(B)$ donc $z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) z_O$ d'où

$z'_2 = iz_2$

2°/ Soit $I = A'*B'$ donc $z_I = \dfrac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \dfrac{i(z_1 - z_2)}{2}$

3°/ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_H - z_O = z_B - z_A \Leftrightarrow z_H = z_2 - z_1$

4°/ $aff(\overrightarrow{OI}) = z_I - z_O = \dfrac{i(z_1 - z_2)}{2}$

$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = z_2 - z_1$

Donc $\dfrac{aff(\overrightarrow{OI})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{-1}{2} i \in i\mathbb{R}$ donc $(OI) \perp (AB)$ d'où (OI) est une hauteur du triangle OAB.

D'autre part : $\dfrac{OI}{AB} = \dfrac{\left|\frac{i}{2}(z_1 - z_2)\right|}{|z_2 - z_1|} = \left|\dfrac{-i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ d'où $OI = \dfrac{1}{2} AB$.

Solution 23 :

1°/ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \dfrac{aff(\overrightarrow{AB})}{aff(\overrightarrow{AC})}$ est un nombre réel

$\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{b - a}{-b - a} \in \mathbb{R}$.

2°/

a) Soit r : la rotation de centre A et qui transforme C en E alors

$r = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où : $r : P \to P$

$M(z) \mapsto M'(z')$

où $z' = e^{-\frac{\pi}{2}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) z_A$

Comme r (C) = E alors $z_E = i\, z_C + (1 - i) z_A$ or $z_A = a$ et $z_C = -b$
d'où $e = -ib + (1 - i)\, a$

b) On a : $R(A, \frac{-\pi}{2})(B) = F$ d'où $f = z_F = e^{-\frac{\pi}{2}} z_B + (1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}) z_A$

d'où f = ib + (1 + i) a

On a : AEFH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE}$

d'où $z_H - z_F = z_E - z_A$ donc $z_H = z_E - z_A = e - a + f$

or e = -ib + a(1 – i) et f = -ib + (1+ i) a

et par suite $h = z_H = -2ib + a$

on a : $h = z_H = -2ib + a$, on a : ACDE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$

d'où $z_D - z_C = z_E - z_A$

et par suite $d = z_D = z_E - z_A + z_C = e - a - b = -ib - ai - b$

3°/

a)

- $\frac{FE}{OA} = \frac{|z_E - z_F|}{|z_A - z_O|} = \left|\frac{e-f}{a}\right| = \left|\frac{-2ia}{a}\right| = |2i| = 2$ d'où FE = 2 OA
- $\frac{aff\,\overrightarrow{FE}}{aff\,\overrightarrow{OA}} = \frac{-2ia}{a} = -2i \in i\mathbb{R}$ d'où (FE) $\perp$ (OA)

b) $\frac{BD}{CH} = \left|\frac{d-b}{h-c}\right| = \left|\frac{-ib-ai-2b}{-2ib+a+b}\right| = \left|\frac{-i(b+a-2ib)}{b+a-2ib}\right| = |-i| = 1$ d'où BD = CH

$\frac{aff\,\overrightarrow{BD}}{aff\,\overrightarrow{CH}} = \frac{d-b}{h-c} = -i \in i\mathbb{R}$ d'où (BD) $\perp$ (CH)

SIMILITUDES

Résultats à retenir :

1°/ a) Une similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

b) Toute similitude directe S autre qu'une translation admet un unique point invariant appelé centre de la similitude.

c) Soit S une similitude directe admettant un point invariant I et $A \neq I$.

• Soit $A' = S(A)$ *alors* $\frac{IA'}{IA} = k$ est le rapport de S et $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}})$ est une mesure de son angle.

• Soit A et B deux point distincts et $A' = S(A); B' = S(B)$ alors $\frac{A'B'}{AB} = k$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$ est une mesure de son angle.

2°/ Soit f une similitude directe de centre I, de rapport k et d'angle α.

soit M d'affixe z et $M' = f(M)$ d'affixe z' alors $z' = ke^{i\alpha}(z - z_I) + z_I$.

3°/ • $S(A,k,\alpha) \circ S(A,k',\alpha') = S(A,kk',\alpha+\alpha')$.

• soit $f = S(A,k,\alpha) \circ S(B,k',\alpha')$.

si $kk' \neq 1$ et $\alpha + \alpha' \not\equiv 0\,(2\pi)$ alors $f = S(C_1, kk', \alpha + \alpha')$

si $kk' = 1$ et $\alpha + \alpha' \not\equiv 0\,(2\pi)$ alors $f = R(C_2, \alpha + \alpha')$

si $kk' \neq 1$ et $\alpha + \alpha' \equiv 0\,(2\pi)$ alors $f = h(C_3, kk')$

si $kk' = 1$ et $\alpha + \alpha' \equiv 0\,(2\pi)$ alors f est une translation.

4°/ Soit A, B, C, D quatre points tel que $A \neq B$ et $C \neq D$ alors il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D.

son rapport est $k = \frac{CD}{AB}$, une mesure de son angle est $\alpha \equiv (\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}})(2\pi)$.

5°/ a) soit f une similitude indirecte de centre ω de rapport k et d'axe Δ.

$$f = S_\Delta \circ h(\omega, k) = h(\omega, k) \circ S_\Delta \quad (\omega \in \Delta)$$

$$\Delta = \left\{ M \in \mathcal{P} \,/\, \vec{\omega M'} = k\, \vec{\omega M} \right\}$$

b) f : similitude directe

g : similitude indirecte

alors
- $f \circ g$ est une similitude indirecte.
- f^{-1} est une similitude directe.
- g^{-1} est une similitude indirecte.

c) $f = S(\omega, k, \alpha) \Rightarrow f^{-1} = S(\omega, \frac{1}{k}, -\alpha)$

$f = S(\omega, k, \Delta) \Rightarrow f^{-1} = S(\omega, \frac{1}{k}, \Delta)$

6°/Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f.

Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2.

7°/Soit f une similitude de centre I, de rapport différent de 1 et d'axe D.

Si $\vec{u}$ est une vecteur directeur de D, alors $(\widehat{\vec{u}, \vec{IM}}) \equiv -(\widehat{\vec{u}, \vec{IM'}})[2\pi]$, pour tout M distinct de I, image M'. La droite D porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MIM'}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le points M' d'affixe z'. L'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$,si et seulement si , il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$.

Dans ce cas $k = |a|$ et $z_I = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ est l'affixe du point I .

EXERCICES

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que

$$(\overrightarrow{CA}, \widehat{\ } \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

la hauteur issue de C coupe (AB) en H et coupe la parallèle à (BC) menée par A en D

On pose $CA = b$ et $BC = a$

1°/ Soit S la similitude directe transformant C en A et B en C.

a) Déterminer son rapport en fonction de a et b et calculer son angle.

b) En utilisant cet angle, démontrer que le centre de S est le point H.

c) Quelle est l'image de A par S.

2°/ En utilisant S, démontrer que : $HC^2 = HA.HB$

3°/ Soit $I = B*C$; $J = C*A$ et $K = A*D$

Démontrer que IJK est un triangle rectangle en J et que dans ce triangle H est le pied de la hauteur issue de J.

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de A par rapport à B.

soit S la similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, telle que $S(A) = B$

1°/ Calculer $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \widehat{\ } \overrightarrow{BD})$ En déduire que $S(E) = D$

2°/ Soit Ω le centre de S.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et BDE. Construire Ω.

3°/ Soit $C' = S(C)$

a) Montrer que B, C et C' sont alignés.

b) En déduire que S transforme la droite (AC) en (CB).

Exercice 3 :

Soit dans le plan $\mathcal{P}$ orienté un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$AC = 2AB \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi).$$

Soit $\mathcal{C}(B)$ le cercle de centre B et de rayon AB et $\mathcal{C}(C)$ le cercle de centre C et de rayon AC. Ces deux cercles passent par A. On appelle E le second point d'intersection.

1°/ Soit S une similitude directe transformant $\mathcal{C}(B)$ en $\mathcal{C}(C)$. Quelle est la valeur du rapport de S ?

On désigne par I le centre de S. Quelle est la valeur de $\frac{IC}{IB}$?

Quel est l'ensemble Γ des centres I des similitudes directes transformant $\mathcal{C}(B)$ en $\mathcal{C}(C)$.

2°/ Soit S_A la similitude directe de centre A transformant B en C. Soit F le point de $\mathcal{C}(C)$ diamétralement opposé à E. Démontrer que $S_A(E) = F$

Exercice 4 :

On donne dans le plan, un rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = a \ ; \ AD = 2a \ ; \ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

Soit J le milieu du segment $[AD]$

1°/ Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en C et B en J.

2°/ Démontrer que le centre K de cette similitude est l'image du point J par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Exercice 5 :

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre O et tel que: $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Soit P un point du segment $[BC]$ distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1°/ Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $r(R)$ et $r(P)$.

b) Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS?

2°/ On note $N = P*S$ et $M = Q*R$ et s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Déterminer $s(P)$ et $s(R)$.

b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque P varie sur $[BC]\setminus\{B\}$.

c) Montrer que les points M, B, N et D sont alignés.

Exercice 6 :

Dans le plan orienté , on considère un triangle ABC tel que:

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1°/ Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.

b) Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.

2°/ Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.

b) b) Soit M un point de la droite (BI), M' son image par S_2. On suppose que M et M' sont deux points distincts de I.

Montrer que : $(\overrightarrow{AM}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{IM}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{IM'}) \quad (\pi\ )$

Exercice 7 :

ABCD est un carré direct, le plan étant orienté

M est un point de la droite (DC); la perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de $[MN]$.

1°/ Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle.

2°/ Par quelle transformation M a-t-il pour image I ?.

3°/ Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit (DC) ?

Exercice 8 :

1°/ Dans le plan orienté soient deux points distincts E et F et O leur milieu.

Soit la similitude directe S_E de centre E, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Soit la similitude directe S_F de centre F, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer $S_F \circ S_E(O)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_F \circ S_E$.

2°/ Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de sens direct

On construit les triangles isocèles directs AMB, BNC, CPD et DQA respectivement rectangles en M, N, P et Q. On note J le milieu de $[AC]$.

a) Soit S_A la similitude directe de centre A transformant M en B.

Soit S_C la similitude directe de centre C transformant B en N.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g = S_C \circ S_A$.

b) Soit S'_C la similitude directe de centre C transformant P en D.

Soit S'_A la similitude directe de centre A transformant D en Q.

Démontrer que $S'_A \circ S'_C = g$.

c) En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont isométriques et orthogonaux.

d) K et L étant les milieux de $[MP]$ et $[NQ]$, démontrer que le triangle JKL est rectangle isocèle.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle ABC de sens direct rectangle en A.

Soit O le milieu de $[BC]$.

Δ la droite passant par C et perpendiculaire à (BC).

B' le point d'intersection des droites (AB) et Δ.

Soit I un point du segment $[BC]$ distinct du point O. On note J le point d'intersection de (AI) et de la droite passant par C et perpendiculaire à (AC).

La perpendiculaire en A à (AI) coupe (BC) en K.

1°/ Faire une figure soignée.

2°/ On désigne par r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image du point B, de la droite (AB), de la droite (BC) et de la droite (AK) par r.

b) Déterminer K' et I' images des points K et I respectivement par r. Placer les points K' et I' sur la figure.

3°/ Soit ω le milieu de $[II']$ et ω' le milieu de $[KK']$. On désigne par S la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

a) Determiner $S(K)$ et $S(I)$.

b) Quel est l'ensemble des points ω lorsque I décrit le segment $[BC]$ privé du point O?

c) Montrer que les points ω , O et ω' sont alignés.

4°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j})$.

Soit M un point d'affixe z, déterminer l'affixe z' du point M' image de M par $r \circ S$.

Exercice 10 :

La plan est orienté. On considère un triangle ABC tel que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est un nombre compris entre 0 et π.

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectifs CA, AB et BC et on désigne par I, J et K leurs centres.

on a : $(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}}) = (\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}}) = (\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$; soit F le symétrique de C par rapport à K.

On considère la similitude directe S_1 de centre C qui transforme I en A et la similitude directe S_2 de centre B qui transforme A en J.

1°/ a) Donner les rapports et les angles de S_1 et S_2.

b) quelle est la nature de $S_2 \circ S_1$?

2°/ Préciser les images des points I et B par $S_2 \circ S_1$.

3°/ Montrer que $IB = JK$ et $(IB) \perp (JK)$

4°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par b et c les affixes respectives des points B et C.

a) Exprimer en fonction de b et c les affixes des points I, J et K.

b) Retrouver alors la question 3°/.

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles équilatéraux $A'BC$, $AB'C$ et ABC'. On note I, J, K les centres respectifs des triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC'.

Soit f la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

g la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

1°/ a) Déterminer la nature de $f \circ g$.

b) Déterminer $f \circ g(J)$. Que peut-on conclure.

2°/ Montrer que $f \circ g(K) = I$

3°/ Montrer alors que IJK est un triangle équilatéral.

4°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par a, b, c les affixes respectifs des points A, B, C.

a) Déterminer en fonction *de* a, b, c les affixes des points I, J, K.

b) Démontrer que ABC et IJK ont même centre de gravité.

Exercice 12 :

On considère un cercle ( ) de diamètre $[OB]$

Soit A un point du segment $[OB]$ distinct de O et de B, tel que $OB = 4.OA$.

et I le milieu de $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le cercle

( ) en M et M' tel que $(\overrightarrow{MO}, \widehat{\ }\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (2π) .Soit N le projeté

orthogonal de A sur (OM).

1°/ a) Donner la nature du quadrilatère $AMBM'$.

b) En déduire que $(AM') \perp (OM)$ et que N, A et M' sont alignés.

2°/ Soit S la similitude directe de centre N telle que $S(M) = A$.

a) Préciser l'angle de S.

b) Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA), en déduire l'image par S du point M'.

3°/ a) Montrer que l'image par S de I est le point I' milieu de $[OA]$.

b) En déduire que (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

4°/ Soit σ la similitude indirecte qui transforme M' en N et B en A.

a) Déterminer les images des points M et B par $\sigma \circ S_{(OB)}$

b) En déduire que $\sigma \circ S_{(OB)}$ est une homothétie que l'on précisera.

c) Ecrire alors σ sous forme réduite.

Exercice 13:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°/ Soit S_1 l'application qui a tout point $M(x,y)$ associe le

point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = 1 - 2y \\ y' = 2x \end{cases}$

1°/ Montrer que S_1 est une similitude directe que l'on caractérisera.

2°/ Soit S_2 l'application qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 3iz + 5 - 2i$

a) Préciser les éléments caractéristiques de S_2.

b) Soit $h = S_1 \circ S_2$

Montrer que h est une homothétie dont on précisera ces éléments caractéristiques.

Exercice 14 :

Dans un plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un triangle CID tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

On trace la hauteur, issue de C, qui coupe la droite (ID) en A et on désigne par B le projeté orthogonal de A sur la droite (CI), et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ) le cercle de diamètre $[CD]$.

Soit s la similitude directe de centre A telle que $s(D) = C$.

1°/ a) Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude s et en déduire $s(C)$.

b) Déterminer et construire le point B' image de B par la similitude s.

c) Déterminer et construire les images (Γ') et $(\mathscr{C}')$ des cercles (Γ) et $(\mathscr{C})$ par la similitude s.

2°/ a) Montrer que le point A appartient au cercle (Γ).

b) Les cercles $(\mathscr{C})$ et (Γ) se recoupent en K. Les cercles $(\mathscr{C}')$ et (Γ') se recoupent en K'. Montrer que les points C, K, K' sont alignés.

Exercice 15 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC non isocèle tel que :

$$(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi).$$

A tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan de bord (BC) et $BM = CN$.

1°/ Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que :

pour tout point M de (AB) on a : $R(M) = N$ et $R(B) = C$

Préciser une mesure de son angle et construire son cercle Ω.

2°/ Soit O le milieu du segment $[BC]$. On désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonal d'axe $(O\Omega)$ et on pose : $f = S_{(O\Omega)} \circ R$.

a) Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3°/ Soit I le milieu du segment $[MN]$.

a) Quel est l'ensemble D des points I lorsque M décrit la droite (AB) ?

b) Construire D.

Exercice 16 :

On considère, dans le plan orienté, un triangle AA_1A_2 tel que $AA_2 = 2AA_1$ et qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{AA_1}, \vec{AA_2}})$ soit comprise entre 0 et π. Les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ passant par A et de centres respectifs A_1 et A_2 se recoupent en B.

1°/ On désigne par S_A la similitude directe de centre A transformant $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_2)$.

Soit M un point de (C_1) et M' son image par S_A.

a) Justifier la relation $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1M}) \equiv (\overrightarrow{A_2A}, \overrightarrow{A_2M'})\ (2\pi)$.

b) Démontrer que les points M, B et M' sont alignés.

2°/ On désigne par σ_A la similitude indirecte de centre A transformant $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_2)$.

a) Donner le rapport de σ_A et montrer que σ_A a pour axe la droite (D) médiatrice du segment $[A_1K]$ où K est le milieu du segment $[AA_2]$.

b) Soit l'application $f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$.

Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement . En déduire que les images par S_A et σ_A de tout point M du plan sont symétriques par rapport à la droite (AA_2).

Exercice 17 :

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

1°/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f.

b) Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D. Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$. Caractériser $g \circ f$.

c) Déduire la forme réduite de l'antidéplacement g.

2°/ Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S. construire le centre Ω de S.

b) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S. En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle.

c) Déterminer l'image du carré $ABCD$ par la similitude S.

d) Montrer que les points A, Ω et J sont alignés.

Exercice 18:

Dans le plan orienté, ABC est un triangle quelconque de sens direct.

I et J les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AB]$

r est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

A' et C' sont les images respectives des points A et C par r.

s est la similitude directe qui transforme I en C' et J en A' . On pose $h = r^{-1} \circ s$

1°/ a) Déterminer les images respectives des points I et J par h.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

2°/ a) Montrer que $(IJ) \perp (A'C')$ et que $A'C' = 2IJ$

b) Déterminer le rapport et l'angle de s et montrer que son centre ω appartient à la fois aux cercles de diamètres $[IC']$ et $[JA']$.

c) B' étant le symétrique de A' par rapport à J montrer que $(\omega B) \perp (\omega B')$

Exercice 19 :

On considère dans le plan P orienté un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique de A par rapport à C.

1°/ Soit f l'antidéplacement de P tel que : $f(C) = A$ et $f(A) = B$

Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

2°/ Soit g la similitude directe telle que : $g(B) = D$ et $g(I) = C$

Montrer que $g(A) = A$ et déterminer les éléments caractéristiques de g.

3°/ Soit Ω le point défini par : $\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega I}=\overrightarrow{0}$

a) Justifier que $f\circ g$ est une similitude indirecte.

b) Déterminer $f\circ g(I)$ et $f\circ g(A)$.

c) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B}+2\overrightarrow{\Omega A}=\overrightarrow{0}$. En déduire que $f\circ g(\Omega)=\Omega$

4°/ a) Déterminer le rapport de la similitude de $f\circ g$.

b) Montrer que l'axe de la similitude $f\circ g$ est la perpendiculaire en Ω à la droite (AB).

Exercice 20:

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}})\equiv\frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1°/ Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.

a) Montrer que Ω est le centre de cette rotation.

b) Soit $C=R(B)$. Montrer que I est le milieu du segment $[AC]$.

2°/ A tout point M de $[AB]$ distinct de A et de B, on associe le point M' de $[IC]$ tel que $AM=IM'$

Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.

3°/ Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.

a) Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.

b) Montrer que $S(B)=I$ et construire le point $A'=S(A)$

c) Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

Exercice 21 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 2AC$.

Soient D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtes du triangle ABC.

Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D'.

La droite Δ coupe D et D' respectivement en I et J.

1°/ Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Soit Ω le centre de S.

Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2°/ a) Déterminer $S(D')$ et $S(\Delta)$.

b) En déduire $S(J)$.

c) Montrer que le cercle de diamètre $[IJ]$ passe par Ω

Exercice 22 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ **(Erreur ! Signet non défini.)**. Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A. On désigne par O,I et J les milieux respectifs des segments [AC] , [BC] et [AD].

1°) Soit s la similitude directe du plan telle que s(J) = B et s(D) = K.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$.

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilatéral).

c) Montrer que C est le centre de la similitude s.

2°) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidéplacement du plan qui transforme D en A et A en A'.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

b) Montrer que f(K) = C.

3°) On pose g = f o s.

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre. Montrer que (g o g) est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4.

vérifier que gog (D) = B.

c) Donner une construction de l'axe Δ de g.

Exercice 23 :

Soit f l'application du plan complexe P dans lui-même, qui au point m d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = -2i\,\overline{z} + 1 + i$

1°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

2°/ Démontrer que $f \circ f$ est une homothétie h que l'on caractérisera

3°/ Soit S la similitude directe de P de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, de rapport $\dfrac{1}{2}$, dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Déterminer la forme complexe de S

b) Soit $\varphi = f \circ S$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ

Exercice 24 :

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives -1+ i ; 3 + 2 i et $i\sqrt{2}$

1°/ f : $\begin{cases} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z')/ z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2}) \end{cases}$

a) Déterminer f (A) et f (C)

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

2°/

a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$

b) Soit $g = f \circ h$

Déterminer le forme complexe de g .

3°/

a) Soit M_0 d'affixe 2 - 4i

Montrer que : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM_0''}$ où $M_0'' = g(M_0)$

b) Déterminer l'ensemble des couples (x , y) $\in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM''}$ où M" = g(M) et M(x,y) .

Exercice 25 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point m d'affixe z , fait correspondre le point M d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{(3+4i)}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$$

1°/ On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'

Démontrer que $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2°/Démontrer que f est une symétrie orthogonale que l'on précisera .

3°/Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixes z tel que : $z' \in \mathbb{R}$

4°/On cherche à déterminer les points de (D) dont les coordonnées sont entiers .

*Donner une solution particulière (x_0 , y_0) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $4x - 3y = 2$ (*)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (*)

5°/ On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$ où $y \in \mathbb{R}$ et $M' = f(M)$

Déterminer les entiers relatifs y tel que Re(z') et Im(z') soient entiers .

Exercice 26 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f : $\begin{cases} P \to P \\ M(x,y) \mapsto M'(x',y') / \begin{cases} x' = x+y-1 \\ x-y+1 \end{cases} \end{cases}$

1°/

a) Montrer que si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors : $z' = (1+i)\,\overline{z} - 1 + i$

b) Montrer que f est une similitude indirecte que l'on précisera .

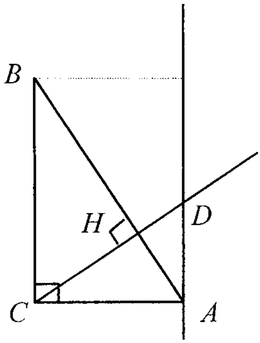
2°/ Soit Γ : l'ensemble des points M (x , y) tels que : $2x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0$

a) Montrer que Γ est une hyperbole dont on précisera les axes , les sommets les asymptotes ; les foyers et les directrices .

b) Ecrire une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$.

SOLUTIONS

Solution 1 :



1°/ a) On a : $S(C) = A$ et $S(B) = C$

Soit k le rapport de S on a : $k = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$

Soit θ une mesure de l'angle de S

on a : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}}) \quad (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) + \pi \quad (2\pi)$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

b) on a : $(HC) \cap (HB) = \{H\} \Rightarrow S(H)$ est le point d'intersection des droites $S(HC)$ et $S(HB)$.

$S(HC) = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_1$ est la droite passant par $S(C) = A$ et perpendiculaire à (HC) d'où $\Delta_1 = (AB)$.

$S(HB) = \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2$ est la droite passant par $S(B) = C$ et perpendiculaire à (HB) d'où $\Delta_2 = (CD)$.

or $S(H)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (CD) or $(AB) \cap (CD) = \{H\}$ et par suite $S(H) = H$.

Conclusion : H est le centre de S.

c) $\{A\} = (AC) \cap (AB) \Rightarrow \{S(A)\} = S(AC) \cap S(AB)$

* $S(AC)$ est la droite passant par $S(C) = A$ et perpendiculaire à (AC) donc $S(AC) = (AD)$.

* $S(AB)$ est la droite passant par $S(B) = C$ et perpendiculaire à (AB). donc $S(AB) = (CD)$

$\{S(A)\} = (AD) \cap (CD) = \{D\}$ d'où $S(A) = D$.

2°/ $S: \ H \to H$

$C \to A$

$B \to C$

on a : $k = \dfrac{HA}{HC}$ et $k = \dfrac{HC}{HB}$

d'où $HC^2 = HA.HB$

3°/ $I = B * C$ donc $S(I) = S(B) * S(C)$ car S conserve les milieux Ω

$S(B) = C$ et $S(C) = A$ d'où $S(I) = C * A = J$

$J = A * C$ donc $S(J) = S(A) * S(C) = D * A = K$

$S: I \to J$

$J \to K$

On a : $(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JK}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ donc IJK est un triangle rectangle en J

* Montrons que $H \in (IK)$

on a : $S: \ H \to H$

$S: \quad I \to J \qquad$ donc $(HI)\perp(HJ)$ et $(HJ)\perp(HK)$

$S: \quad J \to K \qquad$ donc $(HI) \,//\, (HK)$ d'où

H, I et K sont alignés et par suite $H \in (IK)$

* Montrons que $(JH) \perp (IK)$

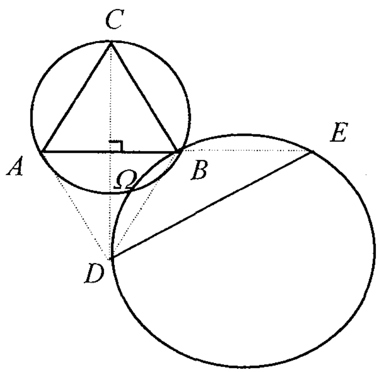
on a $S : H \to H$

$I \to J \qquad$ donc $(JH) \perp (HI)$

or $(HI) = (IK)$ car I,H,K sont alignés d'où $(JH) \perp (IK)$

Conclusion : H est le pied de la hauteur issue de J dans le triangle IJK.

Solution 2 :



1°/ * On a : $BD = BA$ car ADB est un triangle équilatéral

$AE = 2\,AB$ car $B=A*E$ d'où $\dfrac{BD}{AE} = \dfrac{1}{2}$

* $\quad (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}}) \quad (2\pi)$ car $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}) + \pi \quad (2\pi) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad (2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

on a : $\begin{cases} \dfrac{BD}{AE} = \dfrac{1}{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}}) \equiv -\dfrac{2\pi}{3} \quad \mathbf{(2\pi)} \end{cases}$ donc il existe une unique similitude directe

S_1 de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B et E en D.

S et S_1 sont égales car S et S_1 ont même angle, même rapport et transforment de la même façon le point A en B. d'où $S(E) = D$

2°/ S : $\Omega \to \Omega$

$A \to B$

$E \to D$

on a : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (\pi)$

$\Rightarrow \Omega$ appartient au cercle passant par A et B et tangente en A à la

demi-droite (AE) tel que $(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$ or $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

donc $C \in$

donc Ω, A, B, C appartiennent à et par suite Ω appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

* on a : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \Rightarrow \Omega$ appartient au cercle passant par E et

D et tangent en E à la demi-droite $[Et')$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{Et'}, \overrightarrow{ED}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

or $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}}) \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$ donc $B \in$

d'où Ω , E, B, D appartient à ' et par suite Ω appartient au cercle circonscrit au triangle BDE d'où la construction du point ($\Omega \neq B$)

3°/ S : $C \rightarrow C'$

$$A \rightarrow B \quad \text{d'où} \quad (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'B}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

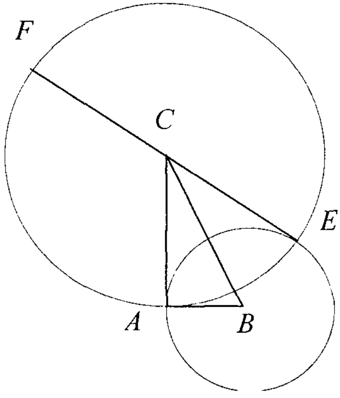
$$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

or $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B}}) \equiv -\pi \quad (2\pi)$ et par conséquent B, C, C' sont alignés.

b) $S(A) = B$ et $S(C) = C'$ d'où $S(AC) = (BC')$

or (BC') = (BC) car B, C, C' sont alignés d'où $S(AC) = (BC')$

Solution 3 :



1°/ On a : $S(\mathscr{C}(B)) = \mathscr{C}(C)$

le rapport de S est k tel que : $k = \dfrac{CA}{AB} = 2$

Soit I le centre de S.

on a : $S(B) = C \Rightarrow IC = 2IB \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = 2$

on a : $\dfrac{IC}{IB} = 2 \Leftrightarrow I$ est un point du cercle de diamètre $[JK]$ où J est le barycentre de $(C,1)$ et $(B,-2)$ et K est le barycentre de $(C,1)$ et $(B,2)$

Conclusion : l'ensemble Γ est le cercle de diamètre $[JK]$.

2°/ On a : $S_A(B) = C \Rightarrow AC = 2AB \Rightarrow A \in \Gamma$

$S_A(A) = A$ et $s_A(B) = C$

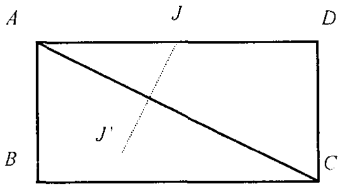
l'angle de S_A est $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi)$

Soit $E' = S_A(E)$; $E \in \mathscr{C}(B)$ il en résulte que son image E' est un point de $\mathscr{C}(C)$.

or $(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AE'}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ $\Rightarrow$ E' appartient à la droite passant par A et $\perp$ à (AE) d'où $E' \in \mathscr{C}(C) \cap \Delta = \{A, F\}$ or $E' \neq A$ d'où $E' = F$.

Conclusion : $S_A(E) = F$

Solution 4 :



1°/ Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en J;

$S(A) = C$ et $S(B) = J$; le rapport de S est $\dfrac{CJ}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$; l'angle de S est $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\,(2\pi)$

Conclusion : S est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{3\pi}{4}$

2°/ Soit $J' = S_{(AC)}(J)$

on a : $J'C = JC$ et $J'A = AJ$ (une symétrie orthogonale conserve les distances) $\Rightarrow \dfrac{J'C}{J'A} = \dfrac{JC}{JA} = \sqrt{2}$ d'autre part $(\overrightarrow{J'A}, \widehat{\ }\overrightarrow{J'C}) \equiv (\overrightarrow{JC}, \widehat{\ }\overrightarrow{JA})\,(2\pi)$

(une symétrie orthogonale transforme les mesures des angles en leurs opposées)

or $(\overrightarrow{JC}, \widehat{\ }\overrightarrow{JA}) \equiv (\overrightarrow{JC}, \widehat{\ }\overrightarrow{JD}) + (\overrightarrow{JD}, \widehat{\ }\overrightarrow{JA})\,(2\pi)$

$$\equiv \frac{\pi}{4} + \pi\ (2\pi) \equiv -\frac{3\pi}{4}\,(2\pi).$$

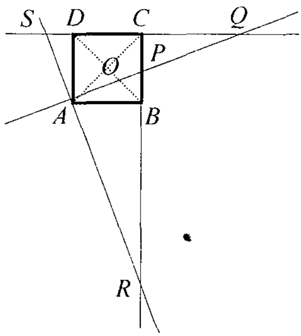
Soit S' la similitude directe de centre J', de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{3\pi}{4}$.

on a : $\dfrac{J'C}{J'A} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{J'A}, \widehat{\ }\overrightarrow{J'C}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}(2\pi) \Rightarrow S'(A) = C$

donc S' est une similitude directe qui a le même rapport et le même angle que S, de plus S' et S coïncident au point A donc $S' = S$.

Conclusion : le centre de S est le point $K = S_{AC}(J)$

Solution 5 :



* $r(B) = D$

Soit Δ_1 l'image de la droite (BC) par r on a : $(\overrightarrow{BC}, \widehat{\ }\overrightarrow{\Delta_1}) \equiv \dfrac{\pi}{2}(\pi)$.

($\vec{\Delta}_1$: vecteur directeur de Δ_1)

d'où Δ_1 est une droite passant par $r(B) = D$ et perpendiculaire à (BC)

d'où $r(BC) = (DC)$

* Δ_2 l'image de (AR) par r et ($\vec{\Delta}_2$: vecteur directeur de Δ_2)

on a : $(\widehat{\vec{AR}, \vec{\Delta}_2}) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Rightarrow \Delta_2 \perp (AR)$

or $r(A) = A$ d'où $\Delta_2 = (AQ)$

on a : $R \in (BC) \cap (AR)$ d'où $r(R) \in (DC) \cap (AQ) \Rightarrow r(R) = Q$.

* $P \in (BC) \cap (AP)$

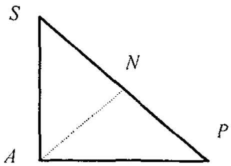
$r((BC)) = (CD)$; $r((AP))$ est une droite passant par $r(A) = A$ et perpendiculaire à (AP) d'où $r((AP)) = (AS)$ d'où

$r(P) \in (CD) \cap (AS) \Rightarrow r(P) = S$.

b) on a : $r(R) = Q \Leftrightarrow \begin{cases} AR = AQ \\ et \\ (\widehat{\vec{AR}, \vec{AQ}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ ARQ est un triangle isocèle rectangle en A, de sens direct.

$r(P) = S \Leftrightarrow \begin{cases} AP = AS \\ et \\ (\widehat{\vec{AP}, \vec{AS}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ APS est un triangle isocèle rectangle en A, de sens direct.

2°/ a) On a : $AN = NS = NP = \frac{\sqrt{2}}{2} AP$



on a : $\begin{cases} AN = \dfrac{1}{\sqrt{2}} AP \\ (\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$ d'où $s(P) = N$

on a : $\begin{cases} AM = \dfrac{1}{\sqrt{2}} AR \\ (\widehat{\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$ d'où $s(R) = M$

b) P décrit $[BC] \setminus \{B\} \Leftrightarrow s(P)$ décrit $[s(B)s(C)] \setminus \{s(B)\}$

or $s(B) = O$ car $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \\ et \\ AO = \dfrac{1}{\sqrt{2}} AB \end{cases}$

$s(C) = D$ car $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \\ et \\ AD = \dfrac{1}{\sqrt{2}} AC \end{cases}$

d'où $s(P)$ décrit $[OD] \setminus \{O\}$

Conclusion : N décrit $[OD] \setminus \{O\}$

c) on a : $N \in [OD] \setminus \{O\} \Rightarrow O, N, D$ sont alignés, or $B \in (OD)$

$\Rightarrow B, N, D$ sont alignés.

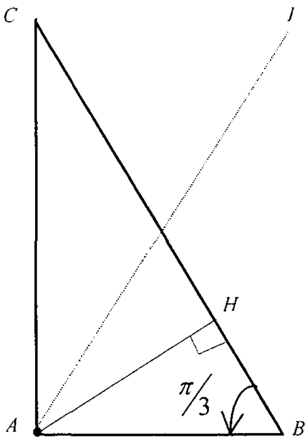
on a : B, C, R alignés et s étant une application qui conserve l'alignement donc $s(B), s(C)$ et $s(R)$ sont alignés.

or $s(B) = O$; $s(C) = D$ et $s(R) = M$ d'où O, D, M sont alignés $\Rightarrow M, B, D$ sont alignés.

Conclusion : B, N, D, M sont alignés.

Solution 6 :

1°/ a)



$S_1 : A \longrightarrow A$

$\quad H \longrightarrow B$

le rapport de S_1 est $k_1 = \dfrac{AB}{AH}$ or $\sin \hat{B} = \dfrac{AH}{AB}$

d'où $k_1 = \dfrac{1}{\sin \hat{B}} = \dfrac{1}{\sin \dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

soit θ_1 une masure de l'angle de S_1

on a : $\theta_1 \equiv (\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}})\ (2\pi) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

Conclusion : S_1 est une similitude directe de centre A de rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

et d'angle dont une mesure est $-\frac{\pi}{6}$

b) on a : $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

ACI est un triangle rectangle en C donc $\frac{AC}{AI} = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où

$\frac{AI}{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

on a : $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ (2\pi) \\ \frac{AI}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ d'où $S_1(C) = I$

$S_1((BC)) = S_1((HC)) = (BI)$ car : $S_1(H) = B\,; S_1(C) = I$

2°/ a)

$S_2 : A \longrightarrow A$

$B \longrightarrow C$

le rapport de S_2 est $k_2 = \frac{AC}{AB} = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ l'angle de S_2 est

$\theta_2 \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

S_2 est une similitude directe de centre A de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$S_2((BI)) = \Delta$ où $(\widehat{\overrightarrow{BI}, \vec{\Delta}}) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$ or $S_2(B) = C$

d'où Δ est une droite passant par C et perpendiculaire à (BI)

d'où $\Delta = (CI)$

Conclusion : l'image de la droite (BI) par S_2 est la droite (CI).

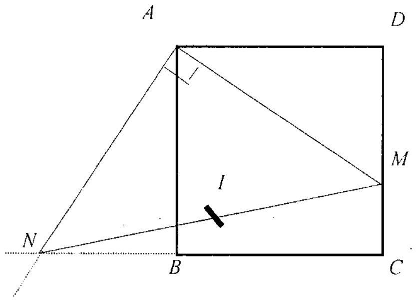
b) $M \in (BI)$; $M' = S_2(M)$ donc $M' \in S_2((BI))$ d'où $M' \in (CI)$

on a : $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} (\pi)$

$(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}}) (\pi) \equiv -\dfrac{\pi}{2} (\pi)$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}})$ (π).

Solution 7 :



1°/ La rotation r de centre A, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$; transforme D en B, donc cette rotation transforme la droite (DC) en la droite (BC).

$r((AM)) = (AN)$

$M \in (AM) \cap (DC) \Rightarrow r(M) \in (AN) \cap (BC) = \{N\}$

donc $r(M) = N$ d'où $\begin{cases} AM = AN \\ (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$

ce qui donne que le triangle AMN est isocèle rectangle en A.

2°/ on a: AMN est un triangle isocèle rectangle en M

et $I = M * N$ donc $AM = \sqrt{2} AI$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4} (2\pi)$

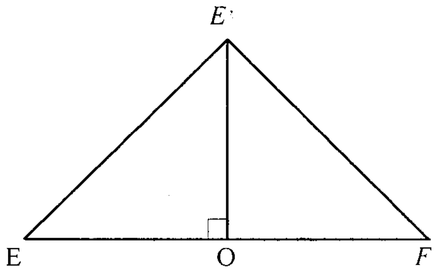
d'où $\begin{cases} \dfrac{AM}{AI} = \sqrt{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$ d'où I est l'image de M par la similitude directe s de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

3°/ M appartient à la droite (DC) donc I est un point de l'image de (DC) par s.

* l'image de D par s est O : centre du carré $ABCD$
* l'image de C par s est B donc l'image de la droite (DC) est la droite (OB) et par suite lorsque M décrit (DC), I décrit (OB).

Solution 8 :

1°/



* Soit $E' = S_E(O) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{EE'}{EO} = \sqrt{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EE'}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$

donc E' est tel que le triangle EOE' est isocèle rectangle en O et de sens direct.

* Le triangle $FE'O$ est isocèle rectangle en O et de sens direct.

donc $\begin{cases} \dfrac{FE'}{FO} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{FE'}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{FO}) \equiv \dfrac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{FO}{FE'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (\overrightarrow{FE'}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{FO}) \equiv \dfrac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

ce qui entraîne que $S_F(E') = O$

Conclusion : $S_F \circ S_E(O) = O$

b) $S_F \circ S_E$ est la composée de deux similitudes directes, de rapport

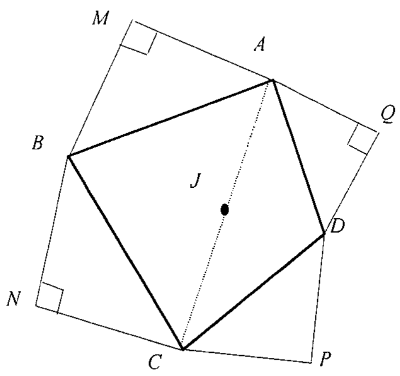
$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$ donc $S_F \circ S_E$ est un déplacement d'angle :

$$\theta \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

donc $S_F \circ S_E$ est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2°/



a) * S_A est la similitude directe de centre A telle que $S_A(M) = B$ donc

le rapport de S_A est $\dfrac{AB}{AM} = \sqrt{2}$ et l'angle de S_A a pour mesure

$(\widehat{\vec{AM}, \vec{AB}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$ (car le triangle AMB est isocèle rectangle en M et de sens direct).

* De la même manière on trouve que S_C est la similitude de centre C, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

D'après la 1°/ $g = S_C \circ S_A$ est la rotation de centre $J = A*C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) * S'_C est la similitude directe de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

* S'_A est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ donc $S'_A \circ S'_C$ est la rotation de centre $J = A*C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

(d'après 1°/) d'où $S'_A \circ S'_C = g$

c) $g(M) = S_C \circ S_A(M) = S_C(B) = N$

$g(P) = S'_A \circ S'_C(P) = S'_A(D) = Q$

donc $g(M) = N$ et $g(P) = Q$ ce qui donne $MP = NQ$ et

$(\widehat{\vec{MP}, \vec{NQ}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ et par suite les segments [MP] et [NQ] sont isométriques et orthogonaux.

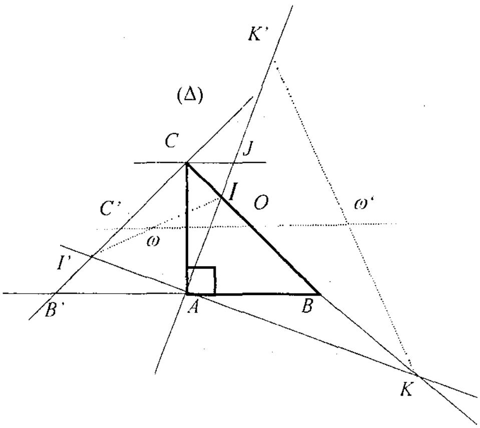
d) on a : $K = M*P \Rightarrow g(K) = g(M)*g(P)$

(une rotation conserve les milieux)$\Rightarrow g(K) = N*Q = L$ d'où $g(K) = L$

donc $\begin{cases} JL = JK \\ (\widehat{\vec{JK}, \vec{JL}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ ce qui prouve que le triangle JKL est isocèle rectangle en J.

Solution 9 :

1°/



2°/ a) on a : $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ d'où $r(B) = C$

on a : $r(A) = A$ et $r(B) = C$ donc $r((AB)) = (AC)$

- $r(BC)$ est la droite passant par $r(B) = C$ et $\perp$ (BC) $\Rightarrow$ $r(BC) = \Delta$
- La droite (AK) est perpendiculaire à (AI) et $r(A) = A$ d'où $r((AK)) = (AI)$

b) * Soit $K' = r(K)$

On a : $K \in (AK)$ donc $K' \in (AI)$ (car $r((AK)) = (AI)$)

de plus $AK = AK'$ donc K' est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AK. et comme $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AK'}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

donc AKK' est un triangle isocèle rectangle en A et de sens direct d'où la construction de K'

* Soit $I' = r(I) \Leftrightarrow \begin{cases} AI = AI' \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ le triangle AII' est isocèle rectangle en A et de sens direct d'où la construction de I'.

3°/ $\omega = I * I'$; $\omega' = K * K'$

a) * Le triangle AKK' est isocèle rectangle en A et de sens direct

et $\omega' = K * K'$ donc $(\overrightarrow{AK}, \widehat{\overrightarrow{A\omega'}}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ et $A\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} AK$ d'où

$S(K) = \omega'$.

* Le triangle AII' est isocèle rectangle en A et de sens direct

et $\omega = I * I'$ donc $(\overrightarrow{AI}, \widehat{\overrightarrow{A\omega}}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ et $A\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} AI$ d'où $S(I) = \omega$.

b) On a : $S(I) = \omega$.

donc lorsque I décrit $[BC]$ privé du point O alors ω décrit le segment

$[S(B)S(C)]$ privé du point $S(O)$

or $S(B) = O$ *car* $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ *et* $\frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Cherchons $S(C)$

on a le triangle ACB' est isocèle rectangle en A de sens direct

Soit $C' = B' * C$. On a : $\frac{AC'}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\overrightarrow{AC}, \widehat{\overrightarrow{AC'}}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ donc

$S(C) = C'$

et on a : $O = B * C$ donc $S(O) = S(B) * S(C) = O * C'$

Conclusion : ω décrit le segment $[OC']$ privé du point $O * C'$.

c) K, B et I sont alignés et S conserve l'alignement donc $S(K)$, $S(B)$ et $S(I)$ sont alignés

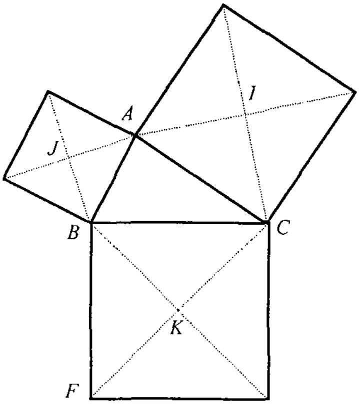
or $S(K) = \omega'$; $S(B) = O$ et $S(I) = \omega$ donc ω, O et ω' sont alignés.

4°/ $r \circ S = S(A, \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4})$

$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} (z - z_A) + z_A$ or $z_A = 0$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

et par suite $z' = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i) z$.

Solution 10 :



1°/ a) * le triangle IAC est isocèle rectangle en I

donc $\dfrac{CA}{CI}=\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{CI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CA})\equiv\dfrac{\pi}{4}\,(2\pi)$ d'où S_1 est la similitude directe de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

* le triangle JBA est isocèle rectangle en J donc $\dfrac{BJ}{BA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BJ})\equiv\dfrac{\pi}{4}\,(2\pi)$ d'où S_2 est la similitude directe de centre B,.de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

b) $S_2\circ S_1$ est une similitude directe d'angle $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$ donc $S_2\circ S_1$ est un déplacement d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ d'où $S_2\circ S_1$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2°/ * $S_2\circ S_1(I)=S_2(A)=J$

* $S_2\circ S_1(B)=S_2(F)=K$

3°/ a) On a : $S_2 \circ S_1(I) = J$ et $S_2 \circ S_1(B) = K$ donc $IB = JK$ (car une rotation conserve les distances) et $(\overrightarrow{IB}, \widehat{\overrightarrow{JK}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ d'où $(IB) \perp (JK)$.

4°/ a) on a : $S_1(I) = A$ et $S_1(C) = C \Rightarrow z_C - z_A = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_I)$ or

$z_C = c$ et $z_A = 0 \Rightarrow c = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(c - z_I) \Rightarrow z_I = \dfrac{c(-1 + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$

d'où $z_I = \frac{c}{2}(1+i)$

on a : $S_2(A) = J$ et $S_2(B) = B \Rightarrow z_J - z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_B)$

or $z_B = b$ et $z_A = 0 \Rightarrow z_J = b(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}})$ d'où $z_J = \frac{b}{2}(1-i)$

on a : $S_2 \circ S_1(I) = J$ et $S_2 \circ S_1(B) = K \Rightarrow z_K - z_J = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_I)$

$\Rightarrow z_K = \frac{b}{2}(1-i) + i(b - \frac{c}{2}(1+i))$ d'où $z_K = \frac{1+i}{2}(b - ic)$

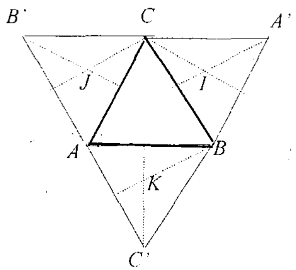
b) on a : $z_I \neq b$ donc $\dfrac{z_K - z_J}{b - z_I} = \dfrac{ib - \frac{ic}{2}(1+i)}{b - \frac{c}{2}(1+i)} = \dfrac{i(b - \frac{c}{2}(1+i))}{b - \frac{c}{2}(1+i)} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $\begin{cases} \left|\dfrac{z_K - z_J}{b - z_I}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_K - z_J}{b - z_I}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_K - z_J| = |b - z_I| \\ \arg\left(\dfrac{z_K - z_J}{b - z_I}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow IB = JK$ et $(\overrightarrow{IB}, \widehat{\overrightarrow{JK}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ d'où $IB = JK$ et $(IB) \perp (JK)$

Solution 11 :

1°/



$f = S(C, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6})$; $g = S(A, \sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1$ d'où $f \circ g$ est la composée de deux similitudes directes

dont le produit des rapports est 1 .

d'où $f \circ g$ est une similitude directe de rapport 1.

or $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ d'où $f \circ g = S(\Omega, 1, \frac{\pi}{6}) = R(\Omega, \frac{\pi}{3})$

b) $g(J) = B'$ car $(\widehat{\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AB'}}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$ et $\frac{AB'}{AJ} = \sqrt{3}$

$f \circ g(J) == f(g(J)) = f(B') = J$ car $(\widehat{\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$ et $\frac{CJ}{CB'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d'où $f \circ g = R(J, \frac{\pi}{3})$

2°/ $f \circ g(K) = f(g(K))$

$g(K) = B$ car $\frac{AB}{AK} = \sqrt{3}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$

$f(B) = I$ car $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI}}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$ et $\frac{CI}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d'où $f \circ g(K) = I$

3°/ $f \circ g(K) = I \Leftrightarrow R(J, \frac{\pi}{3})(K) = I \Leftrightarrow \begin{cases} JK = JI \\ (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JI}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$

d'où IJK est un triangle équilatéral.

4°/ $R(B, \frac{\pi}{3})(A) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)+b$

$R(C, \frac{\pi}{3})(B) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)+c$

$R(A, \frac{\pi}{3})(C) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)+a$

or I centre de gravité du triangle $A'BC$ d'où $z_I = \frac{z_{A'}+z_B+z_C}{3}$

$$z_I = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)+c+b+c}{3} = \frac{(2c+b)+e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)}{3}$$

J centre de gravité du triangle ACB' d'où $z_J = \frac{z_A+z_C+z_{B'}}{3}$

$$z_J = \frac{a+c+e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)+a}{3} = \frac{2a+c+e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)}{3}$$

K centre de gravité du triangle ABC'

$$z_K = \frac{z_A+z_B+z_{C'}}{3} = \frac{a+2b+e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)}{3}$$

b) Soit Ω_1 le centre de gravité du triangle ABC

$$z_{\Omega_1} = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

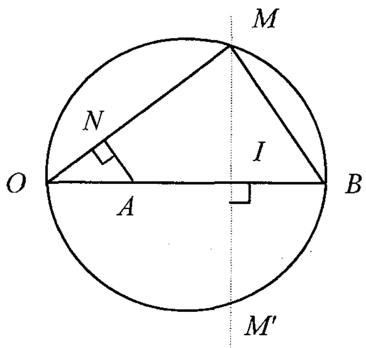
Ω_2 le centre de gravité du triangle IJK

$$z_{\Omega_2} = \frac{z_I+z_J+z_K}{3}$$

$$=\frac{3c+3b+3a+e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c+c-a+a-b)}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

$\Rightarrow \Omega_1=\Omega_2$

Solution 12:



1°/ a) On a $I=A*B$ et $I=M*M'$

donc $AMB\,M'$ est un parallélogramme, d'autre part M appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc $MA=MB$ et par suite $AMB\,M'$ est un losange.

b) * D'une part on a $(AM')\,//\,(MB)$ car $AMB\,M'$ est un parallélogramme.

* D'autre part M appartient au cercle de diamètre $[OB]$

donc $(MB)\perp(MO)$ et par suite $(AM')\perp(MO)$

On a : $(AN)\perp(MO)$ et $(MO)\perp(AM')$ donc $(AN)\,//\,(AM')$ et par suite N, A et M' sont alignés.

2°/ a) On a $S:\ N\rightarrow N$

$M\rightarrow A$ Soit θ une mesure de l'angle de S

$$\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NA}})\quad(2\pi)\equiv-\frac{\pi}{2}\qquad(2\pi)$$

b) $S(MI)$ est la droite passant par $S(M) = A$ et perpendiculaire à la droite (MI) d'où $S(MI) = (AB)$.

* $S(NA)$ est la droite passant par $S(N) = N$ et perpendiculaire à (AN) donc $S(NA) = (ON)$

* On a : $(MI) \cap (NA) = \{M'\}$ donc $\{S(M')\} = S(MI) \cap S(NA)$

$$= (AB) \cap (ON) = \{O\}$$

d'où $S(M') = O$.

3°/ a) On a $I = M * M'$ donc $S(I) = S(M) * S(M')$ or $S(M) = A$ et $S(M') = O$ d'où $I' = S(I) = A * O$

b) Il suffit de montrer que N appartient au cercle de diamètre $[OA]$ et que $(NI') \perp (NI)$

* On a : $(NA) \perp (NO)$ donc N appartient au cercle de diamètre $[OA]$

* On a : $S(N) = N$ or $S(I) = I'$ donc $(NI') \perp (NI)$

4°/ σ : $M' \to N$

$B \to A$

a) $\sigma \circ S_{(OB)}(M) = \sigma(M') = N$

$\sigma \circ S_{(OB)}(B) = \sigma(B) = A$

b) * $\sigma \circ S_{(OB)}$ est la composée de 2 similitudes indirectes donc $\sigma \circ S_{(OB)}$ est une similitude directe. Soit θ une mesure de son angle

$$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NA}}) \quad (2\pi)$$

$\equiv 0 \quad (2\pi)$ car $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{NA}$ sont 2 vecteurs colinéaires et de même sens donc $\sigma \circ S_{(OB)}$ est une homothétie h de rapport $K = \dfrac{NA}{BM}$

Or dans le triangle *OBM*, (*NA*) // (*MB*) donc d'après le théorème de thalès ; on a : $\frac{OA}{OB}=\frac{ON}{OM}=\frac{NA}{BM}$ Or $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{4}$ d'où $K=\frac{1}{4}$

* Soit Ω le centre de h.

on a : $h(M)=N$ donc $\Omega \in (MN)$

$h(B)=A$ donc $\Omega \in (AB)$

or $(AB)\cap(NM)=\{O\}$ d'où $\Omega = O$

Conclusion : $\sigma \circ S_{(OB)} = h(O,\frac{1}{4})$

c) $\sigma \circ S_{(OB)} = h(O,\frac{1}{4})$

d'où $\sigma = S_{(OB)} \circ h(O,\frac{1}{4}) = h(O,\frac{1}{4}) \circ S_{(OB)}$ c'est la forme réduit de σ.

Solution 13:

1°/ Soit $M(z) \xrightarrow{S_1} M'(z')$

$z'=x'+iy'=1-2y+i(2x)=1+2i(x+yi)=2iz+1$

On a : $z'=az+b$ où $a=2i\neq 0$ et $b=1$

et par suite S_1 est une similitude directe de rapport $k=|a|=2$; d'angle

$\theta_1 \equiv \arg a \quad (2\pi) \qquad \equiv \frac{\pi}{2} \qquad (2\pi)$

et de centre Ω_1 d'affixe $z_1=\frac{b}{1-a}=\frac{1}{1-2i}=\frac{1+2i}{5}$

2°/ a) S_2 est une similitude directe :

* De rapport $k_2=|3i|=3$

* D'angle $\theta_2 \equiv \arg(3i) \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2} \qquad (2\pi)$

de centre Ω_2 d'affixe $z_2 = \dfrac{5-2i}{1-3i} = \dfrac{11+13i}{10}$

b) Soit $M \in P$ et $M' = h(M) = S_1 o S_2(M)$

$M' = S_1(M_2)$ où $M_2 = S_2(M)$

on a : $z_{M_2} = 3iz + 5 - 2i$ et $z' = 2iz_{M_2} + 1$

d'où $z' = 2i(3iz + 5 - 2i) + 1 = -6z + 5 + 10i$

h est une similitude directe de rapport $k = |-6| = 6$

D'angle $\theta \equiv \arg(-6) \quad (2\pi)$

$\equiv \pi \quad (2\pi)$

et de centre Ω_1 d'affixe $z_1 = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}$

2°/ a) S_2 est une similitude directe :

* De rapport $k_2 = |3i| = 3$

* D'angle $\theta_2 \equiv \arg(3i) \quad (2\pi) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

de centre Ω_2 d'affixe $z_2 = \dfrac{5-2i}{1-3i} = \dfrac{11+13i}{10}$

b) Soit $M \in P$ et $M' = h(M) = S_1 o S_2(M)$

$M' = S_1(M_2)$ où $M_2 = S_2(M)$

on a : $z_{M_2} = 3iz + 5 - 2i$ et $z' = 2iz_{M_2} + 1$

d'où $z' = 2i(3iz + 5 - 2i) + 1 = -6z + 5 + 10i$

h est une similitude directe de rapport $k = |-6| = 6$

D'angle $\theta \equiv \arg(-6) \quad (2\pi) \equiv \pi \quad (2\pi)$

de centre Ω d'affixe $\dfrac{5+10i}{7}$

donc h est une homothétie de rapport – 6 et de centre $\Omega(\dfrac{5}{7}, \dfrac{10}{7})$

Solution 14 :

1°/ a) Soit θ une mesure de l'angle de s.

On a : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) \quad (2\pi)$

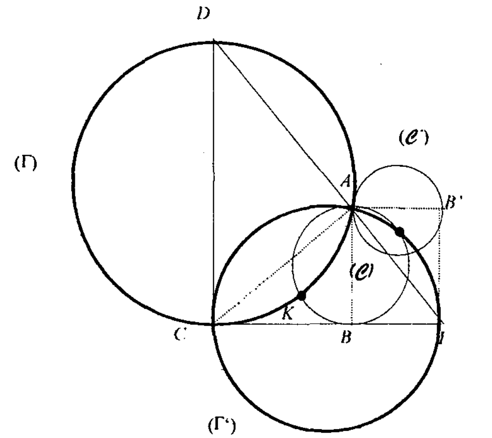
$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

* l'image de la droite (CD) par la similitude s et la droite Δ passant par C (car $s(D) = C$) et orthogonale à (CD).

Ce qui entraîne que $s((DC)) = (CI)$.

* Soit $s(C) = C'$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $C' \in (AI)$, d'autre part $C \in (DC)$ donc $C' \in s((DC)) = (CI)$ et par suite $C' \in (CI) \cap (AI) = \{I\}$

Conclusion : $s(C) = I$



b) Soit $B' = s(B)$ et on a : $s(A) = A, \quad s(C) = I$

donc $(AB) \perp (AB')$ et $(BC) \perp (IB')$ donc B' $\in$ à la droite Δ_1 passant par A et $\perp$ (AB) et B' $\in$ à la droite Δ_2 passant par I et $\perp$ (BC)

d'où B' est le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2.

c) Soit $(\Gamma') = s(\Gamma)$

(Γ') est le cercle de diamètre $[CI]$ car $s(D) = C$ et $s(C) = I$

* Soit $(\mathscr{C}') = s(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C}')$ est le cercle de diamètre $[AB']$ car $s(A) = A$ et $s(B) = B'$

2°/ a) le triangle ACD est rectangle en A donc A appartient au cercle de diamètre $[CD]$ qui est (Γ).

b) on a : $s(\Gamma) = (\Gamma')$ et $s(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$

et $K \in (\Gamma) \cap (\mathscr{C}) \setminus \{A\} \Rightarrow s(K) \in (\Gamma') \cap (\mathscr{C}') \setminus \{A'\} = \{K'\}$ donc $s(K) = K'$

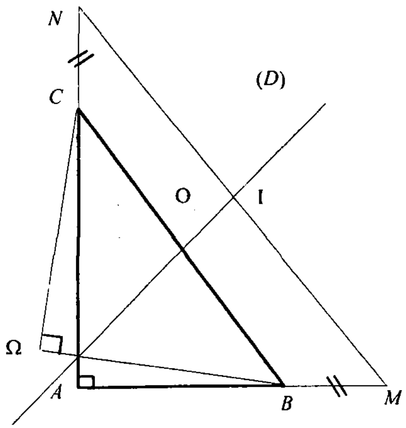
on a : $(\widehat{\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CK'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{IK'}}) + (\widehat{\overrightarrow{IK'}, \overrightarrow{CK'}})\ (2\pi)$

or $s(K) = K'$ *et* $s(C) = I \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{IK'}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ et puisque $K' \in (\Gamma')$ (cercle de diamètre $[CI]$) alors

$(\widehat{\overrightarrow{K'I}, \overrightarrow{K'C}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IK'}, \overrightarrow{CK'}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CK'}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\ (\pi) \equiv 0\ (\pi)$ ce qui entraîne que les points C, K et K' sont alignés.

Solution 15 :



1°/ * on a : $BM = CN$ donc il existe un unique déplacement R tel que

$R(M) = N$ et $R(B) = C$ et comme $(\overrightarrow{BM}, \widehat{\overrightarrow{CN}}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}})\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Alors R est une rotation d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$

* Soit Ω le centre de R.

on a : $R(B) = C$ donc $\Omega B = \Omega C$ et $(\overrightarrow{\Omega B}, \widehat{\overrightarrow{\Omega C}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ce qui entraîne

que le triangle ΩBC est isocèle rectangle en Ω et de sens direct, d'où

la construction de Ω.

2°/ a) * $f(B) = S_{(O\Omega)} \circ R(B) = S_{(O\Omega)}(C) = B$

car la droite $(O\Omega)$ est la médiatrice de $[BC]$.

* $f(\Omega) = S_{(O\Omega)} \circ R(\Omega) = S_{(O\Omega)}(\Omega) = \Omega$

b) f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c'est un antidéplacement, d'autre par f possède deux points invariants

:

Ω et B donc f est une symétrie orthogonale d'axe (ΩB).

3°/ a) Soit $M \in (AB); N = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega N \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \widehat{\overrightarrow{\Omega N}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ donc le

triangle ΩMN est isocèle rectangle en Ω .

Or $I = M * N$ alors $\Omega M = \sqrt{2} IM$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \widehat{\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\Omega I}{\Omega M} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \widehat{\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$$

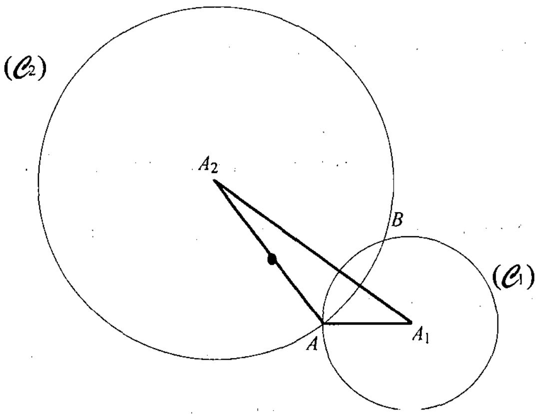
Soit s la similitude de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ il vient alors $s(M) = I$

Lorsque M décrit la droite (AB) alors I décrit la droite D image de (AB) par s.

b) $D = s((AB))$ on a : $s(B) = O$ donc D est la droite passant par O et tel que $(\overrightarrow{AB}, \hat{\overrightarrow{D}}) \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$

Pour construire D, il suffit de choisir un point M de (AB) et un point N de (BC) tel que $BM = CN$ (voir figure) et $I = M * N$. la droite D est alors (OI).

Solution 16 :



1°/ On a : $S_A(C_1) = C_2$ donc $S_A(A_1) = A_2$

d'autre part $S_A(M) = M'$ et $S_A(A) = A$

or on sait qu'une similitude directe conserve les mesures des angles

d'où : $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1M}) \equiv (\overrightarrow{A_2A}, \overrightarrow{A_2M'})(2\pi)$

b) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'})\ (2\pi)$

Or les points B, M et A appartiennent au cercle (C_1) et B, M' et A appartiennent au cercle (C_2)

donc $(\widehat{\vec{BM}, \vec{BA}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\vec{A_1M}, \vec{A_1A}})\ (\pi)$ et $(\widehat{\vec{BA}, \vec{BM'}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\vec{A_2A}, \vec{A_2M'}})\ (\pi)$

d'où $(\widehat{\vec{BM}, \vec{BM'}}) \equiv \frac{1}{2}\left[(\widehat{\vec{A_1M}, \vec{A_1A}}) + (\widehat{\vec{A_2A}, \vec{A_2M'}})\right](\pi) \equiv 0\ (\pi)$(d'après 1-

a)

2°/ on a : $\sigma_A(C_1) = C_2$ donc $\sigma_A(A_1) = A_2$ d'où le rapport de σ_A est

$\frac{AA_2}{AA_1} = 2$ (car $AA_2 = 2AA_1$).

Soit D l'axe de σ_A donc cette similitude indirecte s'écrit :
$\sigma_A = h_{(A,2)} \circ S_D \Rightarrow S_D = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ \sigma_A \Rightarrow S_D(A_1) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ \sigma_A(A_1)$

$\Rightarrow S_D(A_1) = h_{(A,\frac{1}{2})}(A_2) = K$ car $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{A_1A_2}$

d'où D est la médiatrice du segment $[A_1 K]$

b) $f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$

*f est la composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$

donc f est un antidéplacement.

on a : $f(A) = A$; $f(A_2) = \sigma_A \circ S_A^{-1}(A_2) = \sigma_A(A_1) = A_2$ donc A et A_2 sont deux points invariants par f ce qui entraîne que f est la symétrie orthogonale d'axe (AA_2).

Conclusion : $f = S_{(AA_2)}$.

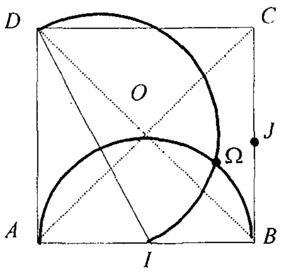
* Soit M un point du plan; $M' = S_A(M)$ et $M'' = \sigma_A(M)$

$\Rightarrow S_A^{-1}(M') = M$

donc $f(M') = \sigma_A \circ S_A^{-1}(M') = \sigma_A(M) = M''$ et par suite $S_{(AA_2)}(M') = M''$

ce qui prouve que M' et M'' sont symétriques par rapport à la droite (AA_2).

Solution 17 :



1°/ a) on a : $AB = CD$ donc il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D.

or $(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}) \equiv \pi\ (2\pi)$ donc f est une rotation d'angle π donc f est une symétrie centrale.

Soit Ω le centre de f, on a : $f(A) = C$ donc $\Omega = A*C = O$

Conclusion : f est une symétrie centrale de centre O.

b) $g(A) = C$ et $g(B) = D$

$g \circ f(C) = g(A) = C$

$g \circ f(D) = g(B) = D$

$g \circ f$ est un antidéplacement car c'est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement et comme C et D sont points invariants par $g \circ f$.

alors $g \circ f = S_{(DC)}$ où $S_{(DC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe la droite $(DC$

2°/a) On a : $S(A) = B$ et $S(D) = I$ donc le rapport de S est le réel

$k = \dfrac{IB}{AD} = \dfrac{1}{2}$ et l'angle de S est $\theta \equiv (\widehat{\vec{AD}, \vec{BI}})\ (2\pi)$

or $(\widehat{\vec{AD}, \vec{BI}}) \equiv (\widehat{\vec{BC}, \vec{BI}})\ (2\pi)$

$\equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Conclusion : S est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Construction du centre Ω de S :

on a : $S(A) = B$ et $S(D) = I \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

et $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc Ω est le point d'intersection du demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé dans le demi-plan de bord (AB) qui contient O, et du demi-cercle de diamètre $[ID]$ situé dans le demi-plan de bord (ID) qui contient O d'où la construction de Ω.

b) on a : $S(A) = B$ donc l'image de la droite (AC) par S est la droite Δ passant par B et orthogonale à (AC) donc $\Delta = (BD)$.

De même on a : $S(D) = I$ donc l'image de la droite (CD) par S est la droite Δ' passant par I et orthogonale à (CD) donc $\Delta' = (OI)$

on a : $C \in (AC) \cap (DC) \Rightarrow S(C) \in S(AC) \cap S(DC)$

$\Rightarrow S(C) \in (BD) \cap (OI) = \{O\}$ donc $S(C) = O \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega O}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ ce qui prouve que le triangle $O\Omega C$ est rectangle en Ω.

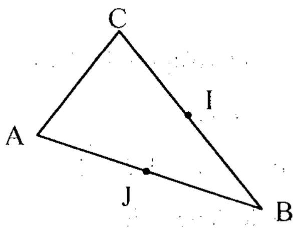
c) on sait qu'une similitude directe conserve les rapports des distances et l'orthogonalité donc l'image du carré $ABCD$ est un carré. Comme $S(A) = B$; $S(D) = I$ et $S(C) = O$ alors l'image du carré $ABCD$ est le carré $OIBJ$.

d) on a : $S(A)=B$; $S(D)=I$ et $S(C)=O$ et l'image du carré $ABCD$ est le carré $OIBJ$ donc $S(B)=J \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega J}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, d'autre part

$S(A)=B \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}})+(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega J}}) \equiv \pi\ (2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega J}}) \equiv \pi\ (2\pi)$ ce qui prouve que les points A, Ω et J sont alignés.

Solution 18 :



1°/ a) * $h(I)=r^{-1}\circ s(I)$

$=r^{-1}[s(I)]$

$=r^{-1}(C')$

$=C$

* $h(J)=r^{-1}[s(J)]=r^{-1}(A')=A$

b) * h est la composée de 2 similitude directes donc h est une similitude directe de rapport $k=1.\frac{A'C'}{IJ}=\frac{AC}{IJ}=2$

car : $A'C'=AC$ (r conserve les distances)

et $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{IJ}$ (théorème des milieux)

* Soit θ une mesure de l'angle de h.

$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CA}})\quad (2\pi)$

$\equiv 0 \qquad (2\pi)$

donc h est une homothétie de rapport 2

* Soit Ω le centre de h.

on a : $h(I)=C \Leftrightarrow \Omega \in (IC)$

et $h(J) = A \Leftrightarrow \Omega \in (AJ)$

or $(AJ) \cap (IC) = \{B\}$ d'où $\Omega = B$

Conclusion : h est une homothétie de centre B et de rapport 2.

2°/ a) * On a : $r(A) = A'$ et $r(C) = C'$

$\Rightarrow \quad (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ d'où $(AC) \perp (A'C')$

* On a : $h(I) = C$ et $h(J) = A \Rightarrow (IJ) \,//\, (AC)$

d'où $(IJ) \perp (A'C')$.

* On a : $A'C' = AC = 2IJ$ (d'après 1°/ b))

b) $h = r^{-1} o s \Rightarrow s = r o h$

* soit k le rapport de $s \Rightarrow k = 1.2 = 2$

* soit α une mesure de l'angle de s

$\alpha \equiv \frac{\pi}{2} + 0 \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

Soit ω le centre de s

$s : \omega \to \omega$

$I \to C'$

$J \to A'$

On a : $(\widehat{\overrightarrow{\omega I}, \overrightarrow{\omega C'}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \Rightarrow \omega$ appartient au demi-cercle Γ_1 de diamètre $[IC']$

* $(\widehat{\overrightarrow{\omega J}, \overrightarrow{\omega A'}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \Rightarrow \omega$ appartient au demi-cercle Γ_2 de diamètre $[JA']$.

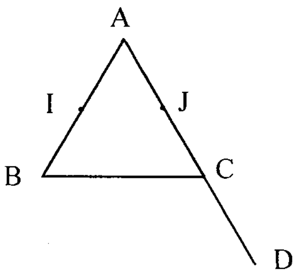
c) On a : $r^{-1} o s = h \Rightarrow \; s = r o h$

s(B) = $r o h(B) = r(B)$

or : $JB = JB'$ et $(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JB'}}) \equiv \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$ d'où $r(B) = B'$

d'où $s(B) = B'$ et comme $s(\omega) = \omega$ alors $(\omega B) \perp (\omega B')$.

Solution 19 :



f étant un antidéplacement

donc f est :

soit une symétrie orthogonale S_Δ

soit une symétrie glissante.

Si $f = S_\Delta$

On a : $C \xrightarrow{f} A$ donc $A \xrightarrow{f} C$ or $f(A) = B$ d'où $f \neq S_\Delta$ et par suite

f est une symétrie glissante et par conséquent il existe un vecteur $\vec{u}$ et une droite D de vecteur $\vec{u}$ tel que :

$f = S_D o T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} o S_D$ (D étant l'axe de f)

on a : $f o f = T_{2\vec{u}}$ d'où $T_{2\vec{u}}(C) = f o f(C) = f(A) = B$

et par suite $2\vec{u} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$f(C) = A \Rightarrow C * A = J \in D$

$f(A) = B \Rightarrow A * B = I \in D$ d'où $D = (IJ)$

Conclusion : $f = S_{(IJ)} o T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}} = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}} o S(IJ)$

$(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{JI}$ (théorème des milieux))

2°/ on a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ car $I = A * B$

on a : $g(A) = A'$, $g(B) = D$ et $g(I) = C$

donc $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$ car $C = A * D$

d'où $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AC}$ et par suite $A' = A$

Conclusion : $g(A) = A$

* Soit k le rapport de g on a : $k = \frac{AD}{AB} = \frac{2AC}{AB} = 2$ car $AB = AC$

* Soit θ une mesure de son angle

$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \quad [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

3°/ a) $f \circ g$ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte donc $f \circ g$ est une similitude indirecte.

b) $f \circ g = f(g(I)) = f(C) = A$

$f \circ g = f(g(A)) = f(A) = B$

c) On a : $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$

or $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}$ d'où $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{\Omega A} + (\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega B}) + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{0}$ soit

ainsi $2\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{0}$

Ω est le barycentre du système $\{(A,1)\ ;\ (I,2)\}$ $f\circ g$ conserve les barycentre donc $f\circ g(\Omega)$ est le barycentre du système $\{(f\circ g(A)\ ,1)\ ;\ (f\circ g(I)\ ,2)\}$ or $f\circ g(A)=B$ et $f\circ g(I)=A$ d'où $f\circ g(\Omega)$ est le barycentre du système $\{(A,1)\ ;\ (I,2)\}$ or Ω est le barycentre de ce système donc $f\circ g(\Omega)=\Omega$ (unicité du barycentre d'un système donné).

4°/ a) Soit k' le rapport de $f\circ g$. $k'=1.k=2$

b) On a : $f\circ g=S_\Delta\circ h(\Omega,2)=h(\Omega,2)\circ S_\Delta \quad \Omega\in\Delta$

On a : $S_\Delta=h(\Omega,\frac{1}{2})\circ f\circ g$

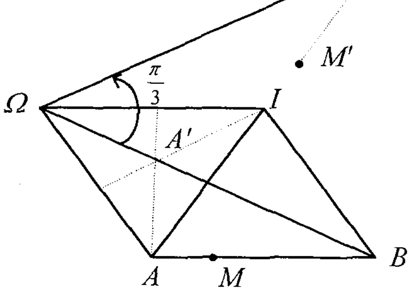
$S_\Delta(A)=h(\Omega,\frac{1}{2})(f\circ g(A))=h(\Omega,\frac{1}{2})(B)$

Soit $B_1=h(\Omega,\frac{1}{2})(B)\Rightarrow B_1\in(\Omega B)=(AB)$

on a : $S_\Delta(A)=B_1\Rightarrow\Delta$ est perpendiculaire à la droite $(AB_1)=(AB)$

Conclusion : l'axe Δ de $f\circ g$ est la droite passant par Ω et perpendiculaire à la droite (AB).

Solution 20 :



1°/ a) On a : $BA=BI$, $S_{(AI)}(B)=\Omega$, $S_{(AI)}(A)=A$, $S_{(AI)}(I)=I$

or $S_{(AI)}$ conserve les distances donc $\Omega A = \Omega I$

donc il existe un unique déplacement f tel que :

$f(\Omega) = \Omega$ et $f(A) = I$

or $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}})$ (2π)

(S_{AI} transforme les mesures des angles en leurs opposés)

et par suite $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ (2π)

donc f est une rotation de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{3}$ f et R sont deux rotations de même angle et qui transforment de la même façon le point A en I et par suite $f = R$.

Conclusion : Ω est le centre de R.

b)on a : $R(A) = I$ et $R(B) = C$ donc $AB = IC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ (2π)

or $AB = IA$ donc $IA = IC$

$$(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}) + \pi + \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\equiv \pi \quad (2\pi)$$

$$\begin{cases} IA = IC \\ (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \pi \quad (2\pi) \end{cases} \Rightarrow I = A * C$$

Conclusion : I est le milieu de $[AC]$

2°/ On a : $AM = IM'$ donc il existe un unique déplacement g tel que $g(A) = I$ et $g(M) = M'$

or $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) \quad (2\pi)$

$$\equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

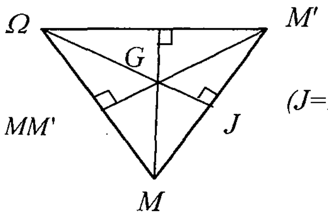
donc g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme A en I alors $g = R$ et par suite $R(M) = M'$ donc

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}$$

Conclusion : $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral.

3°/ a) Soit k le rapport de S on a :

$k = \frac{\Omega G}{\Omega M}$



*(J=M *M')*

$\Omega G = \frac{2}{3}\Omega J = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} MM'$

d'où $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Soit θ une mesure de l'angle de S

On a : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega G}}) \quad (2\pi)$

$$\equiv \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$$

b) On a : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$. D'autre part : $\frac{\Omega I}{\Omega B} = \frac{\Omega I}{2\Omega O}$ où $O = A * I$ or $\frac{\Omega O}{\Omega I} = \cos\frac{\pi}{6}$ (ΩOI triangle rectangle en O)

d'où : $\dfrac{\Omega I}{\Omega B} = \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = k$

Conclusion : $S(B) = I$

ΩAI est un triangle équilatéral, soit K son centre .

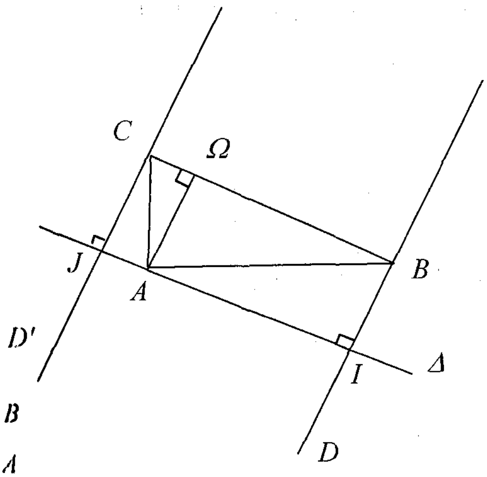
On a : $(\overrightarrow{\Omega A}, \widehat{\overrightarrow{\Omega K}}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi) \qquad \dfrac{\Omega K}{\Omega A} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $S(A) = K$

A' est alors le centre de gravité du triangle ΩAI .

c) On a : A, M, B trois points alignés , et $S(A) = A'$, $S(M) = G$

$S(B) = I$ et comme S conserve l'alignement donc A' , G, I sont alignés.

Solution 21 :



1°/ s : $A \to B$

$C \to A$

a) * Soit θ une mesure de l'angle de S

on a : $\theta \equiv (\overrightarrow{AC}, \widehat{\overrightarrow{BA}}) \quad [2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AC}, \widehat{\overrightarrow{AB}}) + \pi \quad [2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

* Soit k le rapport de S ; on a : $k = \dfrac{AB}{AC} = 2\dfrac{AC}{AC} = 2$

b) on a : $S:\ A \to B$

$C \to A$ donc $(\Omega A) \perp (\Omega B)$ car l'angle de S est $\dfrac{\pi}{2}$.

on a : $s:\ C \to A$

$\Omega \to \Omega$ donc $(\Omega A) \perp (\Omega C)$

On a ainsi $\begin{cases}(\Omega A) \perp (\Omega B) \\ (\Omega A) \perp (\Omega C)\end{cases}$ donc (ΩB) // (ΩC) et par suite Ω, B, C

sont alignés d'où $\Omega \in (BC)$.

on a : $(\Omega A) \perp (\Omega B)$ et $(\Omega B) = (BC)$ d'où $(\Omega A) \perp (BC)$

Conclusion : Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2°/ a) $S(D')$ est une droite perpendiculaire à D' car l'angle de la

similitude S a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

d'autre part $C \in D'$ donc $S(C) \in S(D')$ or $S(C) = A$ donc $A \in S(D')$

on a : $\begin{cases}S(D') \perp D' \\ A \in S(D')\end{cases}$ donc $S(D') = \Delta$

* $S(\Delta)$ est une droite perpendiculaire à Δ et comme $A \in \Delta$ donc

$S(A) \in S(\Delta)$

or $S(A) = B$ donc $B \in S(\Delta)$

on a donc $S(\Delta)$ est la droite passant par B et perpendiculaire à Δ

donc $S(\Delta) = D$.

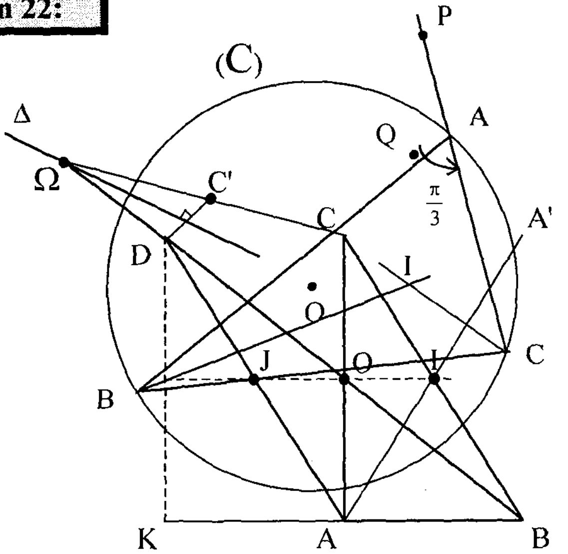
b) $\{J\} = \Delta \cap D'$ donc $\{s(J)\} = s(\Delta) \cap s(D') = D \cap \Delta = \{I\}$ donc $s(J) = I$

c) On a : $s:\ J \to I$

$\Omega \to \Omega$ donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

donc Ω appartient au cercle de diamètre $[IJ]$.

Solution 22:



1°) s : J → B et S : D → K

a) $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{BK}})\ [2\pi]$ ≡**Erreur ! Signet non défini.** $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ $[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) $k = \dfrac{BK}{JD}$ on a : $BK = 2AB$ et $JD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$

d'où $k = 4.\dfrac{AB}{BC} = 4 . \cos\dfrac{\pi}{3} = 2.$

c) Soit C' = s(C) On a : $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'K}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\dfrac{C'K}{CD} = 2$

Or : * $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{CK}})\ [2\pi]$

(S_{AC} : transforme les mesures des angles en leurs opposés)

$$\equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}}) \quad [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Erreur ! Signet non défini. $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{C'K}$ sont colinéaires et de même sens (1)

$$* \ \frac{CK}{CD} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2 \quad \text{donc} \quad CK = C'K \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ <u>$s(C) = C$</u>

2°) $f: D \to A$ et $f: A \to A'$

a) Supposons que f est un symétrie orthogonale d'axe Δ.

Donc $S_\Delta(D) = A$ alors $S_\Delta(A) = D$ or $S_\Delta(A) = A'$ ce qui est impossible donc $f \neq S_\Delta$ d'où f est une symétrie glissante.

On a : $f = S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ (forme réduite de f)

d'une part on a : $f \circ f = T_{2\vec{u}}$ et d'autre part : $f \circ f(D) = A'$ d'où

$2\vec{u} = \overrightarrow{DA'} = 2\overrightarrow{DC}$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$ est son vecteur

$* \ f(D) = A \Rightarrow \quad D * A = J \in \Delta$

d'où Δ est la droite qui passe par J et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}$.

$\Delta = (IJ)$ est l'axe de f.

<u>**Conclusion**</u> : $f = S_{(IJ)} \circ T_{\overrightarrow{DC}} = T_{\overrightarrow{DC}} \circ S_{(IJ)}$.

b) $f(K) = S_{IJ} \circ T_{\overrightarrow{DC}}(K) = S_{IJ}(A) = C$

car : (IJ) ets la médiatrice de [AC]

3°) $g = f \circ s$

a) g est la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement (similitude indirecte de rapport 1) alors g est une similitude indirecte de rapport 2.

b) On a : $g = S_\Delta o\ h_{(\Omega,2)} == h_{(\Omega,2)}\ o\ S_\Delta$

$$g\ o\ g = h_{(\Omega,2)}\ o\ S_\Delta o\ S_\Delta o\ h_{(\Omega,2)} = h_{(\Omega,4)}$$

* g (D) = f o s (D) = f(K) = C

* g o g (D) = g (g(D)) = g (C) = f o s (C) = f(C)

<u>Détermination de f(C)</u> :

On a : KACD parallélogramme donc K * C = A * D

d'où f(K) * f(C) = f(A) * f(D) soit C * f(C) = A' * A

C * f(C) = I d' où f(C) = B .

<u>Conclusion</u> : g o g (D) = B .

c) On a : $g\ o\ g = h_{(\Omega,4)}$

d'où : $h_{(\Omega,4)}(D) = B$ et par suite : $\overrightarrow{\Omega B} = 4\overrightarrow{\Omega D}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega D} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{\Omega D} \Rightarrow 3\overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{DB}$ et par suite $\overrightarrow{D\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

d'où la construction du point Ω centre de g .

On a : $g = S_\Delta o\ h_{(\Omega,2)} = h_{(\Omega,2)}\ o\ S_\Delta \Rightarrow S_\Delta = h_{(\Omega,\frac{1}{2})}\ o\ g$

$S_\Delta(D) = h_{(\Omega,\frac{1}{2})}\ o\ g\ (D) = h_{(\Omega,\frac{1}{2})}(C) = C'$ tel que $\overrightarrow{\Omega C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega C}$

Donc $C' = \Omega * C$

On a ainsi $S_\Delta(D) = C'$ alors Δ est la médiatrice de [DC']

(Δ passe par Ω).

Solution 23:

1°/ f : $z' = -2i\overline{z} + 1 + i$

z' est de la forme $a\overline{z} + b$ où $a \neq 0$

alors f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = |-2i| = 2$

Soit <u>Ω le centre de f</u> :

On a : $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z = -2i\,\overline{z} + 1 + i$

où z : affixe de Ω

on pose $z = x + iy$ on obtient

$x + iy = -2i(x - iy) + 1 + i \Leftrightarrow x + iy = -2y + 1 + i(-2x + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 1 & (1) \\ y = -2x + 1 & (2) \end{cases}$$

(1) : $x = -2(-2x + 1) + 1$

$x = 4x - 1$ d'où $x = \frac{1}{3}$ et par suite $y = \frac{1}{3}$

Conclusion : Ω d'affixe $\frac{1}{3}(1 + i)$ est le centre de f

D = <u>Axe de f</u>

$D = \left\{M(x, y) \in P \,/\, \overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}\right\}$

$\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = 2(z - z_\Omega) \Leftrightarrow$

$-2i\,\overline{z} + 1 + i - \frac{1}{3}(1 + i) = 2z - \frac{2}{3}(1 + i)$

On pose $z = x + iy$ on obtient :

$-2i(x - iy) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = 2(x + iy) - \frac{2}{3}(1 + i)$

$-2ix - 2y + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = 2x + 2iy - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$

$\Leftrightarrow 3x + 3y - 2 = 0$

L'axe de f est la droite D d'équation : $3x + 3y - 2 = 0$

2°/ On sait que $f = h_{(\Omega, 2)} \circ S_D = S_D \circ h_{(\Omega, 2)}$

d'où $f \circ f = h_{(\Omega, 2)} \circ S_D \circ S_D \circ h_{(\Omega, 2)}$

$f \circ f = h_{(\Omega, 4)}$

$f \circ f : z' - z_\Omega = 4(z - z_\Omega)$

$f \circ f \; : \; z' = 4z - 1 - i$

3°/ a) $S : z' = az + b$

on a : $a = ke^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} i$

$\frac{b}{1-a} = z_{\Omega} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} i \Rightarrow b = \frac{1}{3}(1+i)(1 - \frac{1}{2} i)$

$b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} i$

$S : z' = \frac{1}{2} iz + \frac{1}{2} + \frac{i}{6}$

b) $\varphi = f \circ S$

$\varphi \; : z' = -2i \left[\frac{-i}{2} \bar{z} + \frac{1}{2} \frac{-i}{6} \right] + 1 + i$

$z' = -\bar{z} - i - \frac{1}{6} + 1 + i$

$\varphi \; : \; z' = -\bar{z} + \frac{5}{6}$

φ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte d'où φ est une similitude indirecte le rapport de φ est h = $2 \times \frac{1}{2} = 1$

D'où φ est un antidéplacement .

Soit M un point invariant par φ

On a : $\varphi(M) = M \Leftrightarrow x + iy = -(x - iy) + \frac{5}{6} \Leftrightarrow 2x = \frac{5}{6}$

$$x = \frac{5}{12}$$

$\Rightarrow$ l'ensemble des points invariants de φ est une droite $\Delta : x = \frac{5}{12}$

D'où $\varphi = S_{\Delta}$

Solution 24:

1°/ a) f (A) = A'

On a : $z_{A'} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i) - 1 + i(1+\sqrt{2})$

$= -\sqrt{2}\,i - 1 + i + i\sqrt{2}$

$= -1 + i = z_A$ d'où A' = A

On a : f (A) = A

Soit C' = f (C)

On a : $z_{C'} = \dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}}\left(\overline{i\sqrt{2}}\right) - 1 + i(1+\sqrt{2})$ $= -i(1+i) - 1 + i + i\sqrt{2}$

$= i\sqrt{2} = z_C$

D'où C' = C et par suite f (C) = C

b) z' est de la forme $a\bar{z} + b$ où $a = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \neq 0$

alors f est une similitude indirecte or $|a| = 1$ donc f est un

antidéplacement qui a des points invariants A et C d'où $f = S_{AC}$

2°/ a) h : $z' - z_A = \sqrt{2}(z - z_A)$

$z' = \sqrt{2}\,z + z_A(1 - \sqrt{2})$

h : $z' = \sqrt{2}\,z + (\sqrt{2} - 1)(1 - i)$

b) $g = f \circ h$

on a : g : $z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,\bar{z} + (\sqrt{2}-1)(1+i)\right) - 1 + i(1+\sqrt{2})$

$$z' = (1+i)\,\bar{z} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)(2i) - 1 + i + i\sqrt{2}$$

$$= (1+i)\,\bar{z} + 2i - \cancel{\sqrt{2}i} - 1 + i + \cancel{i\sqrt{2}}$$

$$= (1+i)\,\bar{z} - 1 + 3i$$

3°/

a) aff $\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 3 + 2i - (-1 + i) = 4 + i$

aff $\overrightarrow{AM_0''} = z_{M_0''} - z_A$

$z_{M_0''} = (1 + i)(2+4i) - 1 + 3i$

$= 2 + 4i + 2i - 4 - 1 + 3i = -3 + 9i$

aff $\overrightarrow{AM_0''} = (-3 + 9i) - (-1 + i) = -2 + 8i$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM_0''} = 4 \times (-2) + (1 \times 8) = -8 + 8 = 0$

D'où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM_0''}$

b) aff $\overrightarrow{AM''} = z_{M''} - z_A = (1+i)\,\overline{z} + 2i = (1 + i)(x - yi) + 2i$

$= x - yi + xi + y + 2i$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM''} = 4(x+y) + x + 2 - y = 5x + 3y + 2$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM''} \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y = -2$

$5x + 3y = 5(-1) + 3 \times 1$

$5(x + 1) = 3(-y + 1)$ et comme $5 \wedge 3 = 1$

$\Rightarrow$ 3 divise $(x + 1)$ et par suite $x + 1 = 3k$ où $k \in \mathbb{Z}$

$x = 3k - 1$

on a : $3(1 - y) = 5(x + 1) \Leftrightarrow 3(1 - y) = 5(3k) \Leftrightarrow$

$1 - y = 5k$

$y = -5k + 1$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3k - 1 \;, -5k + 1) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$

Solution 25:

1°/ $z' = \frac{(3+4i)}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{(3+4i)}{5}(x - yi) + \frac{1-2i}{5}$

$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{3x+4y}{5} + i\left(\frac{-3y+4x}{5}\right) + \frac{1-2i}{5}$

d'où $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$

2°/ z' est de la forme $a\bar{z} + b$ où $a = \frac{3+4i}{5}$ et $b = \frac{1-2i}{5}$

$a \neq 0$ d'où f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = 1$

d'où f est un antidéplacement

Cherchons l'ensemble des points invariants par f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 4y - 1 = 0$$

D'où f est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

3°/ $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 2 = 0$

D'où : D : $4x - 3y - 2 = 0$

4°/

(2 , 2) est solution de (*)

$4x - 3y = 2 \Leftrightarrow 4x - 3y = 4 \times 2 - 3 \times 2 \Leftrightarrow 4(x-2) = 3(y-2)$

$4 \wedge 3 = 1$ alors $x - 2 = 3k$ où $k \in \mathbb{Z}$

d'où $x = 2 + 3k$

$4(x-2) = 3(y-2) \Leftrightarrow 12k = 3(y-2) \Leftrightarrow y - 2 = 4k$

$y = 2 + 4k$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (2 + 3k , 2 + 4k) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$

5°/ $\begin{cases} \text{Re}(z') \in \mathbb{Z} \\ \text{Im}(z') \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in \mathbb{Z} \\ y' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{4+4y}{5} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2-3y}{5} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4y \equiv 0(5) \\ 2-3y \equiv 0(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y \equiv -4(5) \\ 3y \equiv 2(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv -1(5) \\ 2\times 3y \equiv 4(5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv -1(5) \\ y \equiv -1(5) \end{cases}$$

$y = 5k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$

Solution 26 :

1°/ $z' = x' + iy' = (x + y - 1) + i(x - y + 1)$

$= x + y - 1 + ix - iy + i$

$z' = (1 + i)\,\overline{z} - 1 + i$

2°/ a) z' est de la forme $a\overline{z} + b$ où $a = 1 + i$ et $b = -1 + i$

alors f est uen similitude indirecte .

- le rapport de f est $k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$
- soit Ω le centre de f

on a : $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y - 1 \\ y = x - y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

D'où $\Omega(1,1)$

Axe de f est $D = \{ M(x,y) \in P / \overrightarrow{\Omega M'} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{\Omega M} \}$

On a : $\begin{cases} x' - 1 = \sqrt{2}(x - 1) \\ y' - 1 = \sqrt{2}(y - 1) \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y - 2 = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2}y - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)x + 2 - \sqrt{2} & (1) \\ x - y(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) devient en remplaçant y :

$$x - [(\sqrt{2} - 1)x + 2 - \sqrt{2}](1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$x - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} + 1)(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$x - (1)x - (2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$x - x - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \quad \text{(vraie)}$$

d'où (D) : $y = (\sqrt{2} - 1)x + 2 - \sqrt{2}$

2°/ $2x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - (y^2 - 2y) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$$

Γ est une hyperbole de centre $\Omega'(0, 1)$ d'axes les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 1$;

de sommets les points A $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$; A' $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ les asymptotes d'équations

$y = \sqrt{2}x + 1$ et $y = -\sqrt{2}x + 1$

b) On a : $\begin{cases} x + y - 1 = x' \\ x - y + 1 = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{2} \\ y = \dfrac{x' - y' + 2}{2} \end{cases}$

D'où $\Gamma' : f(\Gamma)$ a pour équation :

$$\Gamma' = 2\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = 1$$

D'où : Γ' : $x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0$

CONIQUES

Résultats à retenir :

1°/ Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D .

Pour tout point M du plan , on note H son projeté orthogonal sur la droite D.

On appelle parabole de foyer F et de directrice D , l'ensemble des points M tels que MF = MH .

2°/ Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal .

Toute parabole rencontre son axe focal en un unique point appelé sommet de la parabole .

3°/ Soit P une parabole de sommet S , de foyer F et de paramètre p .

On munit le plan du repère orthonormé $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$, où $\vec{i}=\frac{1}{SF}$.

La parabole P a pour équation $y^2 = 2px$, la directrice D a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ et le foyer F a pour coordonnées $(\frac{p}{2},0)$.

Réciproquement , dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, l'ensemble des points M (x ,y) tels que $y^2 = 2px$

(p > 0) est la parabole de foyer $F(\frac{p}{2},0)$ de directrice la droite

d'équation $x = -\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O .

4°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit p un réel strictement positif .

Si P est la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Alors la tangente à P en un point $M_0(x_0 , y_0)$ est la droite d'équation $y_0y = p(x + x_0)$.

Si P est la parabole d'équation $x^2 = 2py$, alors la tangente à P en un point $M_0(x_0 , y_0)$ est la droite d'équation $x_0x = p (y + y_0)$.

5°/Soit une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dans le repère orthonormé $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$, où S est le sommet de la parabole et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs unitaires respectifs de l'axe focal et de la directrice . Alors sa tangente au sommet a pour équation $x = 0$.

6°/Soit D une droite , F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 1$. Pour tout point M du plan , on note H son projeté orthogonal sur la droite D .

On appelle hyperbole de foyer F , directrice D et d'excentricité e , l'ensemble des points M tel que $\dfrac{MF}{ME} = e$.

7°/Soit H une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

- L'axe focal de H est un axe de symétrie pour H.
- H rencontre son axe focal en deux points appelées sommets de l'hyperbole et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) , (K, -e) et (F, 1) , (K , e) où K est le projeté orthogonal de F sur D .

8°/Soit H une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e , de sommet S et S' .

On désigne par O le milieu de [SS'] , on pose $\vec{i} = \dfrac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$, directeur de D .

Si S a pour coordonnées (a , 0) et F a pour coordonnées (c, 0) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, alors l'hyperbole H a pour équation

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $b^2 = c^2 - a^2$.

Réciproquement , dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$,

l'ensemble des points M(x,y) tels que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a > 0$, $b > 0$) est

une hyperbole de centre O , de foyer F($\sqrt{a^2+b^2}$, 0) , de directrice

d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de

sommets S(a ,0) et S'(-a ,0) .

Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite Δ : $y = x$, la courbe H d'équation $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est une hyperbole de centre O , de foyer

F(0, $\sqrt{a^2+b^2}$) , de directrice la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$ d'excentricité

$e = \frac{c}{b}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de sommets S(0,b) et S'(0,-b)

9°/

•Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets. Ce centre de symétrie est appelé centre de l'hyperbole.

•Toute hyperbole admet deux axes de symétries qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice et passant par le centre de symétrie.

10°/ Soit H une hyperbole de foyer F et de directrice D .

Le fait que l'hyperbole H admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F .

On dit alors que F est le foyer associé à la directrice D et F' est le foyer associé à la directrice D' .

11°/ Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Alors H admet deux asymptotes d'équations y = $\frac{b}{a}x$ et y = -$\frac{b}{a}x$.

La tangente à H en un point $M_0(x_0 , y_0)$ a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

12°/ La tangente à une hyperbole H en don sommet S (a,0) a pour équation x = a .

13°/ Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme XY = k où k est un réel non nul.

14°/ Soit D une droite , F un point n'appartenant pas à D et un réel e tel que 0 < e < 1 .

Pour tout point M du plan , on note H son projeté orthogonal sur la droite D

On appelle ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e ,

l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH}$ = e .

15°/ Soit E une ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

L'axe focal (E) de e est un axe de symétrie pour E .

E rencontre son axe focal en deux points appelé sommets principaux de l'ellipse et ils sont les barycentres respectifs des points (F , 1) , (K, -e) et (F, 1) , (K , e) où K est le projeté orthogonal de F sur D .

16°/ Soit E une ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

On désigne par O le milieu des sommets principaux S et S' .

On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de sorte que le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ soit orthonormé .

Si S a pour coordonnées (a , 0) et F a pour coordonnées (c,0) alors l'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = a^2 - c^2$ (a.< c).

Cette équation est appelée équation réduite de E .

17°/ Toute ellipse admet un centre de symétrie , qui est le milieu du segment formé par ses sommets principaux .

Ce centre de symétrie est appelé centre de l'ellipse .

Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et la droite perpendiculaire à l'axe focal en son centre .

18°/ Soit E une ellipse de foyer F et directrice D .

Le fait que l'ellipse E admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F par rapport au centre de l'ellipse.

On dit que F est le foyer à la directrice D et que F' est le foyer associé à la directrice D'.

19°/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- Soit a > b deux réels strictement positifs .

L'ensemble des points M (x , y) tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de

L'ensemble des points M (x , y) tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de centre O , de foyer $F\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$, L'ensemble des points M (x , y) tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de centre O , de foyer $F\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$, de directrice associée la droite d'équation x = $\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité e = $\frac{c}{a}$, où $a^2 = c^2 + b^2$.

• Soit a < b deux réels strictement positifs .

L'ensemble des points M (x , y) tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse de centre O , de foyer $F\left(0,\sqrt{a^2-b^2}\right)$, de directrice associée la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{b}$, où $b^2 = a^2 + c^2$.

20°/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a > 0 , b > 0.

Alors la tangente à E en un point M_0 (x_0 , y_0) a pour équation

$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

21°/ La tangente à un ellipse E en son sommet S (a , 0) a pour équation x = a .

La tangente à une ellipse E en son sommet L(0,b) a pour équation y = b .

22°/ Soit D une droite , F un point n'appartenant pas à D et un réel e > 0 .

Pour tout point M du plan , on note H son projeté orthogonal sur D .

On appelle conique C d'excentricité e , de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M tels que MF = eMH .

Si e = 1 , C est une parabole de foyer F et de directrice D .

Si e > 1 , C est une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

Si e < 1, C est une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Soit α un réel. Une droite D de vecteur directeur $\alpha\vec{i}+\vec{j}$ passe par le foyer F de la parabole (P) et coupe cette parabole en deux points M' et M''.

1°/ Déterminer, en fonction de α les coordonnées du milieu K de $[M'M'']$

2°/ Déterminer l'ensemble des points K lorsque α décrit **R**.

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit F(2,0) et D la droite d'équation $x=-2$.

1°/ Ecrire une équation cartésienne de la parabole P de foyer F et de directrice D.

2°/ Soit m un réel donné et (T) le point de la parabole P d'ordonné m et d'abscisse x.

a) Exprimer x en fonction de m.

b) Donner une équation de la tangente à P au point T en fonction de m.

3°/ Montrer que si T et T' sont deux points distincts de P d'ordonnées respectives m et m', les tangentes à P en T et T' sont sécantes. Soit I leur point d'intersection. Déterminer les coordonnées de I en fonction de m et m'.

Exercice 3 :

Soit t un réel de $[0, 2\pi[$ et l'ellipse E de représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Ecrire une équation cartésienne de l'ellipse E.

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à l'ellipse E au point M_0 de paramètre t_0.

2°/ Soit F le foyer d'abscisse $c > 0$ et soit D la droite dont une équation cartésienne est $x = \dfrac{4}{c}$.

on suppose que $t_0 \neq 0$ et $t_0 \neq \pi$. Déterminer en fonction de t_0 les coordonnées du point K d'intersection de la tangente en M_0 à E de la droite D.

3°/ Montrer que les droites (M_0F) et (FK) sont perpendiculaire.

Exercice 4 :

Soit dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation :

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Soient le foyer F d'abscisse $c > 0$ et D la droite d'équation: $x = \dfrac{a^2}{c}$

1°/ Soit M un point de $(\mathcal{H})$ et H le projeté orthogonal sur la droite D.

Montrer que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{c}{a}$.

2°/ Soit M un point de $(\mathcal{H})$ de coordonnées x_0 et y_0, avec $y_0 \neq 0$. Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de la tangente en M à $(\mathcal{H})$ et la droite D.

3°/ Montrer que les droites (FM) et (FK) sont perpendiculaires.

Exercice 5 :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et

$f : P \to P \;:\; M(z) \mapsto M'(z') \;/\; z' = 2z - z^2$.

1°/ Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$ où $z \in \mathbf{C}$.

Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

2°/ Soit H l'ensemble des points M(*z*) tels que z' soit un nombre imaginaire.

a) Déterminer une équation cartésienne de H .

b) Montrer que H est une hyperbole passant par O.

c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à H en O.

Exercice 6 :

Soit *u* un nombre complexe et (E_u) l'équation :

$z^2 - (2u - i\overline{u})z - 2iu \cdot \overline{u} = 0$.

1°/ Résoudre dans **C** , l'équation (E_u). On désignera par z' et z'' les solutions de cette équation.

2°/ On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et on désigne par A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives $2i$, u, z' et z''

Soit H l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés.

a) Trouver une équation cartésienne de H.

b) Montrer que l'ensemble H est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.

c) Vérifier que H passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à H en O.

d) Tracer H.

Exercice 7 :

a tout réel m $\in$]0 ,1[on associe dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la conique (E_m) d'équation $y^2 = 2x - \dfrac{x^2}{m}$

1°/ Déterminer et construire $\left(E_{3/4}\right)$

2°/ Quelle est la nature de (E_m) ?

Déterminer par leurs coordonnées dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, le centre et les sommets de (E_m) .

3°/ Déterminer et tracer la courbe (Γ) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de (E_m) quand varie dans]0,1[.

4°/

a) Déterminer par leurs coordonnées dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les foyers de (E_m) .

b) Déterminer la courbe (C) constituant l'ensemble de ces foyers quand m varie dans l'intervalle]0,1[

Exercice 8 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x,y) vérifiant : $4x\,|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

1°/ Montrer que (Γ) est la réunion d'une partie d'une conique (C_1) et d'une partie d'une conique (C_2)

2°/ Déterminer pour chacune des coniques (C_1) et (C_2) la nature , le centre , les sommets et éventuellement les asymptotes

3°/ Montrer qu'en chacun des points où les courbes (C_1) et (C_2) coupent le droite $\left(O,\vec{j}\right)$ elles ont même tangente.

Exercice 9 :

On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan dont les coordonnées (x,y) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ satisfont à la relation : $\frac{y^4}{16}=x^4-2x^2+1$

1°/ Démontrer que (Γ) est la réunion de deux coniques

2°/ Tracer Γ en précisant leurs axes , leurs sommets , leurs foyers et leur asymptotes éventuelles.

Solution 10 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. A tout nombre réel m , on associe l'ensemble (C_m) des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

Etudier suivant m , la nature de (C_m)

Solution 11 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1°/ Pour tout point M du plan , on note z son affixe

a) Vérifier que l'ensemble des points M tels que $\bar{z}+z+4=0$ est une droite (D) ,tracer (D) .

b) Démontrer que , pour tout point M de (P) la distance de M à D est : $\frac{1}{2}\left|z+\bar{z}+4\right|$

2°/ On note F le point d'affixe (1 + i) P' le plan P privé de la droite D .

Soit (E) : l'ensemble des points M , d'affixe z de P' tels que :

$$\left|\frac{z-1-i}{z+\overline{z}+4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

a) Démontrer que (E) est une conique dont on précisera l'excentricité

b) Vérifier que (E) passe O .

SOLUTIONS

Solution 1 :

$P: \quad y^2 = 2px$

$M \in D \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{FM}, \alpha\vec{i}+\vec{j}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{p}{2} & \alpha \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{p}{2} - \alpha y = 0 \quad ;$

$D: \quad x - \alpha y - \frac{p}{2} = 0$

1°/ $M \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} M(x,y) \; ; \; y^2 = 2px \\ x - \alpha y - \frac{p}{2} = 0 \end{cases}$

on a : $y^2 - 2p(\alpha y + \frac{p}{2}) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2p\alpha y - p^2 = 0$

$\Delta = 4p^2\alpha^2 + 4p^2 = 4p^2(\alpha^2+1)$

$y' = \dfrac{2p\alpha - 2p\sqrt{\alpha^2+1}}{2} = p(\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}) \quad ; \quad y'' = p(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$.

$\Rightarrow x' = \alpha y' + \frac{p}{2} = \alpha p(\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}) + \frac{p}{2}$ d'où $x' = p(\alpha^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \frac{1}{2})$

$x'' = \alpha y'' + \frac{p}{2} = \alpha p(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}) + \frac{p}{2} = p(\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \frac{1}{2})$

Soit $K = M' * M''$; $x_K = \dfrac{x'+x''}{2} = p(\alpha^2 + \frac{1}{2})$; $y_K = \dfrac{y'+y''}{2} = p\alpha$

d'où $K(p\alpha^2 + \frac{p}{2}, p\alpha)$

2°/ Soit $x = p\alpha^2 + \frac{p}{2}$ et $y = p\alpha$

$\begin{cases} x = p(\alpha^2 + \frac{1}{2}) \\ y = p\alpha \end{cases}$

Lorsque α décrit **R** $\Leftrightarrow$ y décrit **R** d'où

$x = p(\frac{y^2}{p^2} + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{p} + \frac{1}{2}p \Leftrightarrow y^2 = p(x - \frac{1}{2}p)$

on pose $\begin{cases} X = x - \dfrac{1}{2}p \\ Y = y \end{cases}$ on obtient $Y^2 = 2qX$ où $q = \dfrac{p}{2}$

Conclusion :K décrit la parabole de foyer $F'(\dfrac{3p}{4},0)$ et de directrice $\Delta : x = \dfrac{p}{4}$

Solution 2 :

1°/ (P) = { M / d(M, F) = d(M, D) }

M(x,y) et D : $x+2=0 \Rightarrow$ d(M,D) $= \dfrac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x+2|$

MF $= \sqrt{(x-2)^2+y^2}$; on a : $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = |x+2| \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+y^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2 = x^2+4x+4 \Leftrightarrow y^2 = 8x$.

Conclusion : $(\mathrm{P}): y^2 = 8x$.

2°/a) T $\in$ (P) et T(x,m). On a : $m^2 = 8x$ d'où $x = \dfrac{m^2}{8}$.

b) Δ la tangente à (P) au point T.

$\Delta : yy_0 = 4(x+x_0)$ or $x_0 = \dfrac{m^2}{8}$ et $y_0 = m$

d'où $\Delta : my = 4(x + \dfrac{m^2}{8})$

Conclusion : $\Delta : 4x - my + \dfrac{m^2}{2} = 0$.

3°/ $\Delta : 4x - my + \dfrac{m^2}{2} = 0$; $\Delta' : 4x - m'y + \dfrac{m'^2}{2} = 0$

$coef(\Delta) = \dfrac{4}{m}$ et $coef(\Delta') = \dfrac{4}{m'}$ or $m \neq m'$ donc $coef(\Delta) \neq coef(\Delta')$

et par suite Δ et Δ' ne sont pas parallèles.

Conclusion : Δ et Δ' se coupent en un point I.

Soit $I(x,y) \in \Delta \cap \Delta' \Rightarrow \begin{cases} 4x - my + \dfrac{m^2}{2} = 0 \\ 4x - m'y + \dfrac{m'^2}{2} = 0 \end{cases}$

d'où $(m-m')y + \dfrac{m'^2 - m^2}{2} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{m+m'}{2}$

on a

$$4x - my + \frac{m^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(my - \frac{m^2}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{m^2 + mm'}{2} - \frac{m^2}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{mm'}{8}$$

$I(\dfrac{mm'}{8}, \dfrac{m+m'}{2})$

Solution 3 :

1°/ a) $M(x,y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ d'où l'équation $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

b) $M_0(x_0, y_0) / \begin{cases} x_0 = 2\cos t_0 \\ y_0 = \sin t_0 \end{cases}$ la tangente à E en M_0 a pour équation :

$$\frac{xx_0}{4} + yy_0 = 1 \Rightarrow \frac{x\cos t_0}{2} + y\sin t_0 = 1 \Rightarrow T: \quad x\cos t_0 + 2\sin t_0 \cdot y - 2 = 0$$

2°/ on a : $c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Soit $D: \; x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Soit $K(x,y)$ le point d'intersection de T et D $\begin{cases} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ x\cos t_0 + 2y\sin t_0 - 2 = 0 \end{cases}$

$$2\sin t_0 \cdot y = 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\cos t_0$$

$$y = \frac{1}{\sin t_0} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\cos t_0}{\sin t_0} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3} - 2\cos t_0}{\sqrt{3}\sin t_0} \text{ d'où } K(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3} - 2\cos t_0}{\sqrt{3}\sin t_0})$$

3°/ $\overrightarrow{M_0F}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\cos t_0\\ -\sin t_0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}\dfrac{4}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}-2\cos t_0}{\sqrt{3}\sin t_0}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{M_0F}\cdot\overrightarrow{FK}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-2\cos t_0)-\frac{(\sqrt{3}-2\cos t_0)}{\sqrt{3}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t_0-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t_0=0\Rightarrow(M_0F)\perp(FK)$$

Solution 4 :

1°/ on a : $y^2=(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2$ or $c^2=a^2+b^2$ d'où $y^2=(\frac{x^2}{a^2}-1)(c^2-a^2)$

$$MF^2=(x-c)^2+y^2$$

$$MF^2=(x-c)^2+(x^2-a^2)(\frac{c^2}{a^2}-1)$$

$$=x^2-2cx+c^2+\frac{x^2c^2}{a^2}-x^2-c^2+a^2$$

$$=\frac{x^2c^2}{a^2}-2cx+a^2=\frac{c^2}{a^2}\left[x^2-\frac{2a^2x}{c}+\frac{a^4}{c^2}\right]$$

$$=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2 \quad \text{or } MH^2=\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2 \text{ d'où } \frac{MF}{MH}=\frac{c}{a}$$

2°/ Soit $M(x_0,y_0)$ avec $y_0\neq 0$.

Soit T la tangente à $(\mathscr{H})$ en M. $T:\ \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

Soit $K(x,y)\in T\cap D$

$$\begin{cases}\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1 & (*)\\[2mm] x=\dfrac{a^2}{c} & (**)\end{cases}$$

(*) dévient : $\frac{x_0}{c} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

$y = (\frac{x_0}{c} - 1)\frac{b^2}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$ d'où $K(\frac{a^2}{c} ; \frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{y_0})$

3°/ $\vec{FM}\begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix}$; $\vec{FK}\begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{y_0} \end{pmatrix}$

$$\vec{FM} \cdot \vec{FK} = (x_0 - c)(\frac{a^2 - c^2}{c}) + b^2(\frac{x_0}{c} - 1)$$

$$= (x_0 - c)(-\frac{b^2}{c}) + \frac{b^2}{c}(x_0 - c) = 0 \text{ d'où } (FM) \perp (FK).$$

Solution 5 :

1°/ On a : $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z^2$ et $z_{\overrightarrow{M'M_2}} = 2z - z' = 2z - 2z + z^2 = z^2$ d'où

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M'M_2}$ et par suite OM_1M_2M' est un parallélogramme.

2°/a) $z' = 2z - z^2$. On pose $z = x + iy$

$z' = 2x + 2iy - (x^2 - y^2 + 2ix\,y) = 2x - x^2 + y^2 + i(2x - 2xy)$

z' est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $2x - x^2 + y^2 = 0$ d'où

(H) : $x^2 - 2x - y^2 = 0$.

b) $x^2 - 2x - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 1$

on pose $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$ d'où (H) : $X^2 - Y^2 = 1$

alors (H) est un hyperbole équilatère.

Les coordonnées de O vérifient l'équation de (H) $\Rightarrow O \in (H)$.

c) T : $(x-1)(x_0-1)-yy_0=1$

or $x_0=0$ et $y_0=0 \Rightarrow T: x=0$

Solution 6 :

1°/ $\Delta=(2u-i\bar{u})^2-4(-2iu\bar{u}) = 4u^2-4iu\bar{u}-(\bar{u})^2+8iu\bar{u}$

$$=4u^2+4iu\bar{u}-(\bar{u})^2=(2u+i\bar{u})^2$$

$$z'=\frac{2u-i\bar{u}-2u-i\bar{u}}{2}=-i\bar{u}$$

$$z''=\frac{2u-i\bar{u}+2u+i\bar{u}}{2}=2u$$

2°/a) $z_{\overrightarrow{AM'}}=z_{M'}-z_A=-i\bar{u}-2i=-i(x-yi)-2i$ (avec $u=x+iy$)

$$=-y-(x+2)i\ .$$

$z_{\overrightarrow{AM''}}=z_{M''}-z_A=2u-2i=2x+i(2y-2)$

A, M', M'' sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} -y & 2x \\ -x-2 & 2y-2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$-y(2y-2)+2x(x+2)=0 \Leftrightarrow 2x^2+4x-2y^2+2y=0 \Leftrightarrow$

(H) : $x^2+2x-y^2+y=0$

b) $M(x,y)\in(H) \Leftrightarrow x^2+2x-y^2+y=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^3}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$$

c'est une équation cartésienne d'une hyperbole équilatère de centre

$\Omega(-1,\frac{1}{2})$ de sommets $A(\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\frac{1}{2})$ et $A'(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\ ,\frac{1}{2})$ et de foyers

$F(\frac{\sqrt{6}}{2}-1,\frac{1}{2})$; $F'(-\frac{\sqrt{6}}{2}-1,\frac{1}{2})$. Les asymptotes sont $\Delta: Y=X$ et

$\Delta': Y=-X$ donc $\Delta: y=x+\frac{3}{2}$ et $\Delta': y=-x-\frac{1}{2}$.

c) (H) : $x^2+2x-y^2+y=0$

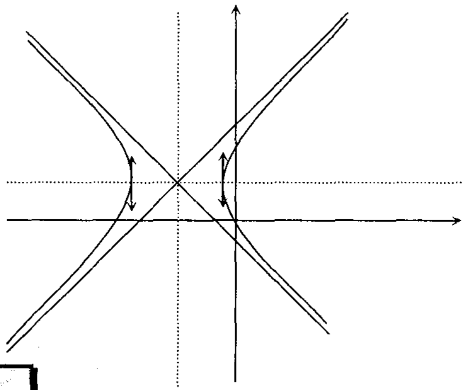
Les coordonnées de O(0,0) vérifient l'équation de (H) donc $O(0,0) \in$ (H).

Soit (T) la tangente à (H) en O

T : $(x+1)(x_0+1)-(y-\frac{1}{2})(y_0-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$

T : $x+1+\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ d'où T : $x+\frac{1}{2}y=0$.

d)



Solution 7 :

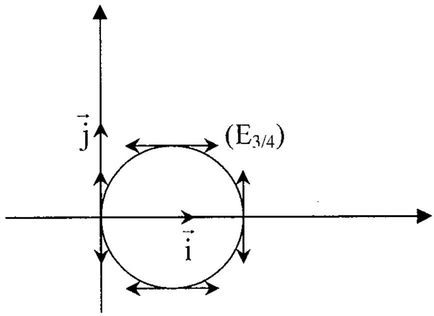
1°/ $E_{3/4}$: $y^2 = 2x - \frac{4x^2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}y^2 = \frac{3}{2}x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{3}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

D'où $\left(E_{3/4}\right)$ est une ellipse de centre $\Omega\left(\frac{3}{4},0\right)$ d'axes : $x = \frac{3}{4}$; $y = 0$

de sommets $A\left(\frac{3}{2},0\right)$; O(0,0) ; $B\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



2°/ $y^2 = 2x - \dfrac{x^2}{m} \Leftrightarrow x^2 - 2m\,x + my^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 - m^2 + my^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-m)^2}{m^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m})^2} = 1$$

D'où (E_m) est une ellipse de centre Ω_m (m,0) et de sommets

A_m(2m,0) ; O (0,0) ; B_m (m, $\sqrt{m}$) et B'_m .(m ,$-\sqrt{m}$)

3°/ on a : $\sqrt{m} > m$ (car $m \in \,]0\,,1[$)

les sommets du grand axe sont donc B_m et B'_m M(x ,y) est un sommet du grand axe

$$\begin{cases} x = m \\ y = \pm\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m \\ y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Gamma) : y^2 = x \\ x \in]0,1[\end{cases}$$

(Γ) est une partie d'une parabole

4°/ a = m

b = $-\sqrt{m}$ d'où $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{m - m^2}$

les foyers de (E_m) sont F_m (m , $\sqrt{m - m^2}$) et F_m (m , $\sqrt{m - m^2}$)

M(x,y) est un foyer de (E_m) ssi

$$\begin{cases} x = m \\ y = \pm\sqrt{m - m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m \\ y^2 = m - m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x - x^2 \\ x \in]0,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ x \in]0,1[\end{cases}$$

D'où (C) est le cercle de centre $I(\frac{1}{2},0)$ de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O (0,0) et O'(1,0)

Solution 8 :

$$4x\,|x| + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \\ où\ x \geq 0 \end{cases} ou \begin{cases} -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \\ où\ x \leq 0 \end{cases}$$

Or : $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + \frac{y^2}{4} - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} - 9 = 0$$

- $-4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - \frac{y^2}{4} + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - \frac{y^2}{4} + 1 = 0$$

Soit (C_1) : $\begin{cases} (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} - 9 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1)\begin{cases} \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{6^2} = 1 \\ où\ X \geq -2 \end{cases} \begin{pmatrix} X = x - 2 \\ Y = y \end{pmatrix}$

(C_1) est une partie d'une ellipse

$$(C_2)\begin{cases} \frac{-X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \\ X \geq 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} X = x + 2 \\ Y = y \end{pmatrix}$$

(C_2) est une partie d'une hyperbole .

2°/

- L'ellipse (C_1) a pour centre $\Omega_1\ (2,0)$ et pour sommets

$A_1(5,0)$; $A_1^{'}\ (-1,0)$

$B_1\ (2,6)$ et $B_1^{'}(2,-6)$

- L'hyperbole (C_2) a pour centre $\Omega_2\ (-2,0)$ pour sommets $B_2(-2,2)$;

B'(-2,2) et pour asymptotes

$\Delta_1 : y = 2x + 4$ et $\Delta_2 : y = -2x - 4$

1°/ $(C_1) \cap \left(O,\vec{j}\right) : \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 & (*) \\ x = 0 \end{cases}$

(*) s'écrit : $y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{5}$ ou $y = -2\sqrt{5}$

$(C_1) \cap \left(O,\vec{j}\right) = \{\ T_1\ (0\ ,\ 2\sqrt{5}\ )\ ;\ T_1^{'}\ (0,\ -2\sqrt{5}\ )\ \}$

- L'équation de la tangente à (C_1) au point $T_1\ (0,\ 2\sqrt{5}\ )$ est :

$$\frac{(x_0-2)(x-2)}{9} + \frac{y_0 y}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{9} + \frac{2\sqrt{5}y}{36} = 1$$

D'où $4x - \sqrt{5}\,y + 10 = 0$

- L'équation de la tangente à (C_1) au point $T_1^{'}\ (0,\ -2\sqrt{5}\ )$ est

$4x + \sqrt{5}\,y + 10 = 0$.

$(C_2) \cap \left(O,\vec{j}\right) : \begin{cases} -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases}$

D'où $(C_2) \cap \left(O,\vec{j}\right) = \{\ T_1\ (0\ ,\ 2\sqrt{5}\ )\ ;\ T_1^{'}\ (0,\ -2\sqrt{5}\ )\ \}$

- L'équation de la tangente à (C_2) au point T_1 est : $4x - \sqrt{5}\,y + 10 = 0$
- L'équation de la tangente à (C_2) au point $T_1^{'}$ est : $4x + \sqrt{5}\,y + 10 = 0$

Solution 9 :

$$1°/ \frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = (x^2-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = x^2 - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{4} = -x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad (2)$$

(1) est l'équation d'une hyperbole (H)

(2) est l'équation d'une ellipsse (E)

d'où : $(\Gamma) = H \cup (E)$

2°/(H) a pour axes les axes du repère pour sommets les points A(1,0) et A'(-1,0) pour foyers

$F_1(\sqrt{5},0)$ et $F_2(-\sqrt{5},0)$ pour asymptotes les droites $D_1 : y = 2x$ et $D_2 : y = -2x$

- (E) a pour axes les axes de coordonnées pour sommets les points A(1,0) ; A'(-1,0) ; B(0,2) ; B'(0,-2)

pour foyers les points $F_2(0, \sqrt{3})$ et $F'_2(0, -\sqrt{3})$.

Solution 10 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. A tout nombre réel m , on associe l'ensemble (C_m) des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

Etudier suivant m , la nature de (C_m)

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m(x^2 - 4x) - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m[(x-2)^2 - 4] - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow m(x-2)^2 - 4m - (m-1)y^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m(x-2)^2 - (m-1)y^2 = 4m - 2$

- Pour $m = \frac{1}{2}$: $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$: $\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow (x,y) = (2,0)$

  D'où : $E_{\frac{1}{2}} = \{\ \Omega(2,0)\ \}$

- Pour $m \neq \frac{1}{2}$ $\frac{m}{4m-2}(x-2)^2 + \frac{1-m}{4m-2}y^2 = 1$

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\frac{m}{4m-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$\frac{1-m}{4m-2}$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

- Pour $m \in]-\infty, 0[\ \cup\ ]1, +\infty[$: l'équation (E_m) est de la forme :

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où } a^2 = \frac{4m-2}{m} \text{ et } b^2 = -\left(\frac{4m-2}{1-m}\right)$$

D'où (E_m) est une hyperbole de centre $\Omega(2,0)$

- Pour $m \in]0, \frac{1}{2}[$ d'où $E_m = \varnothing$

- Pour $m = 0$: $E_m = \frac{-y^2}{2} = 1 \Rightarrow E_m = \varnothing$

- Pour $m \in]\frac{1}{2}, 1[$: (E_m) est de la forme : $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

où $a^2 = \frac{4m-2}{m}$ et $b^2 = \frac{4m-2}{1-m}$.

Solution 11 :

1°/

a) On pose z = x + iy (x ∈ ℝ , y ∈ ℝ)

$\bar{z} + z + 4 = 0 \Leftrightarrow x - iy + x + iy + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0$

D : x = -2

b) $d(M,D) = |x + 2| = \frac{1}{2}|z + \bar{z} + 4|$

2°/ M(z) ∈ (E) $\Leftrightarrow \left|\frac{z - 1 - i}{z + \bar{z} + 4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,D)} = \frac{\sqrt{2}}{2} = e$

On a : 0 < e < 1 d'où (E) est une ellipse d'excentricité e = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D est une directrice de (E) ; F est l'un de ces foyers)

b) On a : O (0,0) ∈ (E) en effet :

$$\left|\frac{z_0 - 1 - i}{z_0 + \overline{z_0} + 4}\right| = \frac{|1 + i|}{|4|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

D'où O ∈ (E) .

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Résultats à retenir :

1°/ Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tous réels α et β :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$

2°/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels .

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, si et seulement si , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, $\alpha\vec{u} \wedge \beta\vec{v} = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

3°/ L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$,

$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}).\vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}).\vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4°/ Le volume d'un parallélogramme ABCDEFGH est égal à

$\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}\right|$.

5°/ L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S une sphère de centre A et de rayon R . Soit P un plan , h la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P ,

L'intersection de S et P est

- Vide si h > R ,
- réduite au singleton {H} si h = R ,
- le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$ et de centre H si h < R.

6°/On appelle distance d'un point M à une droite D , la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur D . Cette distance est notée d (M , D) .

7°/Soit D une droite de vecteur $\vec{u}$ et A un point de D.

La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel

$$d(M, D) = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} .$$

8°/Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$.

Pour tous points M et M' de l'espace, $t_{\vec{u}}$ (M) = M' équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

9°/Toute translation de l'espace de vecteur $\vec{u}$ est bijective. Son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Pour tous points M et N de l'espace, N = $t_{\vec{u}}$ (M) équivaut à M = $t_{-\vec{u}}$ (N)

10°/ Une application de l'espace dans lui-même est une translation, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

- Toute translation de l'espace conserve la distance.
- Toute translation de l'espace conserve le produit scalaire .

11°/ L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle .

12°/ Toute translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Toute translation conserve le milieu.

13°/ L'image d'une sphère S par une translation est une sphère S' de même rayon et de centre l'image du centre .

14°/ L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

• Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace .

Si M (x , y ,z) est un point de l'espace et M' (x' , y' , z') est son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$.

• L'application qui à tout point M (x , y ,z) associe le point M' (x' , y' , z') tel que $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$ est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

15°/ Soit I un point de l'espace et K un réel non nul . L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport k , elle est notée $h_{(I\,,\,k)}$.

Pour tous points M et M' de l'espace , $h_{(I,k)}$ (M) = M' équivaut à $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$.

16°/ Toute homothétie de centre I et de rapport non nul k est une bijection de l'espace et admet comme application réciproque l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$. Pour tous points M et N de l'espace, N = $h_{(I,k)}$ (M) équivaut à M = $h_{\left(I,\frac{1}{k}\right)}$ (N) .

17°/ Soit f une application de l'espace dans lui-même et k un réel non nul et différent de 1 .

f est une homothétie de rapport k , si et seulement si , pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

18°/ Soit h une homothétie de l'espace de rapport k .

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h ,

M'N' = $|k|$ MN .

19°/ L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'un plan par une homothétie est un plan qui lui est parallèle.

20°/ Toute homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Toute homothétie conserve le milieu .

21°/ L'image d'une sphère S de centre I et de rayon R par une homothétie de l'espace de rapport k est une sphère S' de centre I' image de I et de rayon $|k|$ R .

22°/ Toute homothétie de l'espace conserve le contact.

23°/ L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

•Soit un point I (a , b , c) , k un réel non nul et différent de 1 et l'homothétie de centre I et de rapport k .

Si M (x , y , z) est un point de l'espace et M' (x' , y' ,z') est sin image

par h , alors $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$

•L'application qui à tout point M (x ,y ,z) associe le point

M' (x' , y' , z') tel que $\begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta, k \neq 1 \\ z' = kz + \delta \end{cases}$

est l'homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k}, \frac{\beta}{1-k}, \frac{\delta}{1-k}\right)$ et de rapport k.

EXERCICES

Exercice 1 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient $A(1,0,-1)$; $B(2,0,0)$; $C(0,1,-2)$.

1°/ a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) En déduire une représentation cartésienne de la droite (AB).

2°/ a) Montrer que les points A, B et C forment un plan P.

b) Donner une équation cartésienne de P.

3°/ Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par O.

Exercice 2 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit les droites $D_1 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$

1°/ Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2°/ Soit P le plan passant par O et contenant la droite D_1 et Q le plan passant par O et contenant la droite D_2

a) Donner une équation cartésienne de P puis de Q.

b) Prouver que P et Q sont sécants en une droite Δ. Donner alors un système d'équations paramétriques de Δ.

Exercice 3 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les trois droites : $D_1 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 1 \\ z = -\alpha + 2 \end{cases}$; $D_2 : \begin{cases} x = \beta - 1 \\ y = \beta \\ z = 1 \end{cases}$; $D_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = \gamma - 1 \\ z = \gamma - 2 \end{cases}$.

α, β, γ trois réels quelconques.

1°/ Démontrer que D_1, D_2, D_3 sont concourantes en un point I que l'on précisera.

2°/ a) Déterminer par son équation cartésienne le plan P contenant les droites D_1 et D_2.

b) D_3 est-elle incluse dans P ?

Exercice 4 :

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On note P_α l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ vérifiant:

$$\begin{cases} x = k + k' \\ y = k - 1 \\ z = k + k' + \cos\alpha \end{cases} \quad \text{ou } (k,k') \in \mathbf{R}^2$$

1°/ a) Montrer que P_α est un plan.

b) Donner une équation cartésienne de P_α

2°/ Soit Δ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant : $x = 1$ et $y = z$

a) Montrer que Δ est une droite.

b) Démontrer que P_α rencontre Δ en un point A_α dont on précisera les coordonnées.

3°/Soit $B(1,1,1)$

a) Montrer que $\overrightarrow{BA_\alpha} = (\cos\alpha).\overrightarrow{e}$ où $\overrightarrow{e}$ est un vecteur que l'on préciser

b) En déduire que A_α varie sur une droite fixe (δ)que l'on précisera.

Exercice 5 :

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $m \in \mathbf{R}$ et on considère les droites D et D' :

$$D : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 1 \\ z = \alpha + 3 \end{cases} (\alpha \in \mathbf{R}) \text{ et } D' : \begin{cases} x = 2 + m\beta \\ y = -1 - 2m\beta \\ z = 5 - \beta \end{cases} (\beta \in \mathbf{R})$$

1°/ Montrer que $\forall m \in \mathbf{R}$; D et D' ne sont pas parallèles.

2°/ a) Déterminer m pour que D et D' soient coplanaires.

b) Préciser dans ce cas les coordonnées du point I d'intersection des droites D et D'.

3°/ Soit P_m le plan d'équation cartésienne :

$mx + y + (2 - 2m)z + 5m - 5 = 0$

a) Montrer que la droite D est incluse dans le plan P_m .

b) Déterminer $(OI) \cap P_m$.

Exercice 6:

ξ l'espace et $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ repère orthonormé direct. A(0,2,3) , B(1,-1,3), C(3,0,2).

1) Montrer que A,B,C ne sont pas alignés

2) a- Déterminer $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- Que représente $\vec{u}$ pour P = (ABC)

c- En déduire une équation cartésienne du plan P

3) Calculer $\cos\alpha$ et $(\sin\alpha)$ $\alpha = B\widehat{A}C$

Exercice 7 :

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne A(2,0,1) ; B(3,-2,0) et C(2,8,-4).

1°/ Soit M (x , y , z)

Calculer $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$

2°/ Déterminer les coordonnées u point N tel que : $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$

3°/ Montrer que le volume du tétraèdre ABCN est $\frac{1}{6}CN^{2}$.

Exercice 8 :

Soit $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ

1°/ Soit G le centre de gravité de ABC

a) Déterminer les coordonnées du point G

b) Montrer que : $(OG) \perp (ABC)$.

2°/ Soit A'(2,0,0) ; B' (0,2,0) et C'(0,0,3)

a) Calculer $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$

b) En déduire une équation du plan P' = (A'B'C') est :

$3x + 3y + 2z - 6 = 0$

3°/ Déterminer les coordonnées du point K intersection de (AC) et du plan P'.

Exercice 9 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace ξ.

On considère les points A(2,7,9) ; B(1,1,2) ; C(-1,2,7)

1°/ a)Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire l'aire du triangle ABC

2°/

a) Déterminer l'ensemble E des points M tels que :

$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{O}$

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que :

$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC}$

Exercice 10 :

ABCDEFGH un cube de côté 1 .

L'espace ξ est orienté par le repère orthonormé direct (A , $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$)

I = E * F

K : centre du carré ADHE

1°/ Vérifier que : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

2°/ En déduire l'aire du triangle IGA .

3°/

a) Calculer le volume du tétraèdre ABIG

b) En déduire la distance du point B au plan AIG .

Exercice 11 :

A et B deux points distincts de l'espace , I = A * B

1°/ Démontrer que pour tout M de l'espace on a :

$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}$

2°/ Déterminer l'ensemble (Γ) des points de l'espace tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = MI.AB$$

Exercice 12 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

1°/ On considère les points A(0 , 1 , 1) , B(1 , 0 , 1) et C(1 , 1 , 0) .

a) Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés .

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par A, B et C est $x + y + z - 2 = 0$.

c) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et tangente à P . On notera I le point de contact de S et P .

2°/ α étant un réel, on considère les points E($-\alpha$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, α) et F($-\alpha$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, α)

Soit S_α l'ensemble des points M de ξ tels que $ME^2 + \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EF} = 0$

a) Montrer que S_α est la sphère de diamètre [EF] .

b) Montrer que pour tout réel α , S_α est tangente à P .

c) On notera J le point de contact de S_α et P .

Déterminer α pour que $IJ = \sqrt{2}$.

Exercice 13 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points A(1,1,0) ; B(0,1,1) ; C(1,0,1) et H(2/3,2/3,2/3).

1°/ Vérifier que les trois points A,B et C déterminent un plan P.

2°/a) Vérifier que le vecteur $\vec{N}$ (1,1,1) est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est : $x+y+z-2=0$.

3°/ Vérifier que l'on a les deux résultats suivants :

a) Le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan P.

b) Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°/ Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et qui est tangente au plan P.

5°/ Soit m un paramètre réel tel que $0 < m < 2$ et soit P_m le plan d'équation : $x + y + z - m = 0$

a) Vérifier que P_m et P sont strictement parallèles.

b) Montrer que l'intersection de S et de P_m est un cercle que l'on notera C_m.

c) Déterminer les coordonnées du centre du cercle C_m et préciser son rayon.

Exercice 14 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(S) l'ensemble des points M (x,y,z) vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z$$

1°/

a) Montrer que (S) est une sphère que l'on caractérisera .

b) Soit B (2, 2 , -2)

Montrer que [OB] est une corde de (S)

2°/ Soit M un point variable de (S) et C le point de ξ tels que :

OMCB soit un parallélogramme

a) Montrer que C est l'image de M par une translation

b) En déduire l'ensemble des points C

3°/ Soit G le centre de gravité du triangle MBC et A' le symétrique de O para rapport à B

a) Démontrer que G est l'image de M par une homothétie h de centre A' et dont on précisera le rapport .

b) En déduire l'ensemble décrit par G

Exercice 15 :

A et B deux points fixes de l'espace

On considère (S) l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

1°/ Déterminer (S)

2°/ Soit G le centre de gravité du triangle AMB et O le milieu de [AB]

a) Montrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$., Quelle est limage de M par h .

3°/ Déterminer l'ensemble décrit par G lorsque M varie .

Exercice 16 :

Soit ABCD un tétraèdre

A' , B' , C' les milieux respectifs de [DA] ; [DB] , [DC]

A" , B" , C" le milieux respectifs de [B'C'] , [C'A'] et [A'B']

1°/ Démontrer que : $\overrightarrow{A''B''} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

2°/ a) Déterminer le centre O de l'homothétie h de rapport $\frac{-1}{4}$ qui transforme A en A" .

b) Déterminer h(B) , h(C)

c) Soit G le centre de gravité du triangle ABC

Déterminer h(G)

3°/ Démontrer que O, D , G sont alignés

Exercice 17 :

On considère dans l'espace ξ , la sphère S fixe de centre O et de rayon r > 0 . [AB] une corde de (S)

M un point variable de (S) et N l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1°/ I = B * M

Montrer que I est l'image de N par une homothétie h que l'on précisera .

2°/ G centre de gravité de BMN

a) Montrer que : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$

b) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$

3°/

a) Déterminer l'ensemble décrit par I lorsque M varie sur (S)

b) Déterminer alors l'ensemble décrit par G .

Exercice 18 :

A et B deux points de l'espace ξ .

$$f \ : \begin{cases} \xi \to \xi \\ M \mapsto M' \text{tels que : } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \end{cases}$$

1°/ Soit A le point de l'espace tels que $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{O}$

Montrer que G est un point invariant par f

2°/ Montrer que pour tout point M de ξ

On a : $\overrightarrow{GM'} = -4\overrightarrow{GM}$ en déduire f

3°/ Soit φ l'homothétie de centre G et de rapport $k \neq 0$

a) Déterminer $\varphi \circ f$

b) Déterminer k tel que : $\varphi = f^{-1}$

4°/ Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace ξ tels que :

$MM' = 2$ où $M' = f(M)$

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

$M(x,y,z)\in(AB)$ si et seulement s'il existe $\alpha\in\mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$

donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=0 \qquad\qquad \alpha\in\mathbf{R}\\ z=-1+\alpha\end{cases}$$

b) Du système paramétrique de la droite (AB)

on a : $y=0$ et $\alpha=x-1=z+1$

Donc une représentation cartésienne de (AB) est : $\begin{cases}x-1=z+1.\\ y=0\end{cases}$

2°/ a) Il suffit de prouver que les points A, B, et C ne sont pas alignés

ou que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ;

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a : $1.1-0.(-1)=1\neq 0$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B, et C forment un plan P.

b) $M(x,y,z)\in P$ si et seulement s'il existe deux réels α et β.

tels que : $\overrightarrow{AM}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$.

d'où $\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta & (1) \\ y = \beta & (2) \\ z = -1 + \alpha - \beta & (3) \end{cases}$

En faisant la différence des équations (1) et (3) on obtient :

$x - z - 2 = 0$ c'est une équation cartésienne de P.

3°/ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et comme Q est parallèle à P

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à Q d'où $Q : x - z + d = 0$

or $O \in Q$ donc $d = 0$ et par suite $Q : x - z = 0$

Solution 2 :

1°/ $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_1.

$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_2.

on a $1.0 - (-1).1 \neq 0$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires ce qui prouve que D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

* Montrons maintenant que D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

Si D_1 et D_2 sont sécantes en un point $I(x, y, z)$ alors :

$\begin{cases} x = \alpha = \beta + 1 \\ y = 1 + \alpha = \beta \\ z = -\alpha = 0 \end{cases}$ on obtient : $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

Or ces valeur ne vérifient pas l'équation : $\alpha = \beta + 1$

ce qui prouve que les deux droites D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

Conclusion : D_1 et D_2 ne sont ni parallèles ni sécantes donc D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2°/ a) * on a $O \notin D_1$ donc P est un plan passant par O et dont un couple de vecteurs directeurs est$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u_1})$où $A(0, 1, 0)$ est un point de D_1.

$M(x, y, z) \in P$ si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que :

$\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{u_1}$ d'où $\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\beta \end{cases}$.

Une équation cartésienne de P est alors : $x + z = 0$

De même soit $B(1, 0, 0)$ un point de D_2 . $M(x, y, z) \in Q$ si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OB} + \beta\,\overrightarrow{u_2}$

d'où $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$ une équation cartésienne de Q est alors $z = 0$.

b) Soit $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à Q

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc P n'est pas parallèle à Q et par suite P et Q sont sécants soit $\Delta = P \cap Q$

* $M(x, y, z) \in \Delta$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}$$

Solution 3 :

1°/ * Etudions $D_1 \cap D_2$

$$M(x,y,z) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha = \beta - 1 \\ y = \alpha + 1 = \beta \\ z = -\alpha + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

donc D_1 et D_2 sont sécantes en un point $I(1,2,1)$

* Etudions $D_1 \cap D_3$

$$M(x,y,z) \in D_1 \cap D_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha = 1 \\ y = \alpha + 1 = \gamma - 1 \\ z = -\alpha + 2 = \gamma - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

donc D_1 et D_3 sont sécantes au même point $I(1,2,1)$ ce qui prouve que D_1, D_2 et D_3 sont sécantes en $I(1,2,1)$.

2°/ a) P est le plan passant par $I(1,2,1)$ et dont un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ où $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_1.

$\vec{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_2.

$M(x, y, z) \in$ P si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$ en faisons la différence des deux premières

équations. On obtient une équation cartésienne de P : $x - y + 1 = 0$

b) Soit $A(1,-1,-2)$ un point de D_3 .

Les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation de P donc la droite D_3 n'est pas incluse dans P.

Solution 4 :

1°/ a) Soit $A(0,-1,\cos\alpha)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires . P_α est le plan passant par A et dont un couple de vecteurs directeurs est ($\vec{u}$, $\vec{v}$)

b) On a : $x = k + k'$ et $z = k + k' + \cos\alpha$ d'où P_α : $x - z + \cos\alpha = 0$

2°/ a) Soit $z = t$. On a : $\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$. Δ est la droite passant par $I(1,0,0)$ dont un vecteur directeur $\vec{W}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{W}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de P_α car les coordonnées de $\vec{W}$ ne vérifient pas l'équation : $x - z = 0$ donc Δ n'est pas parallèle à P_α et par suite P_α rencontre Δ en un seul point A_α

$A_\alpha(x,y,z) \in P_\alpha \cap \Delta$ donc : $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ x - z + \cos\alpha = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z = 1 + \cos\alpha \end{cases}$

d'où $A_\alpha(1, 1+\cos\alpha, 1+\cos\alpha)$

3°/ a) $\overrightarrow{BA_\alpha}\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BA_\alpha} = (\cos\alpha)\vec{j} + (\cos\alpha)\vec{k}$

et par suite $\overrightarrow{BA_\alpha} = \cos\alpha(\vec{j}+\vec{k}) = (\cos\alpha)\vec{e}$ où $\vec{e} = \vec{j}+\vec{k}$

b) $\overrightarrow{BA_\alpha} = (\cos\alpha)\vec{e}$ donc $\overrightarrow{BA_\alpha}$ et $\vec{e}$ sont colinéaires et par suite A_α varie sur la droite δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{e}$.

Solution 5 :

1°/ Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D. Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\ -2m\\ -1\end{pmatrix}$ un

vecteur

directeur de D'. D et D' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et par suite on a :

$$\begin{cases} -4m+2m=0 \\ -2-m=0 \\ 2+2m=0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \\ m=-1 \end{cases} \text{ ce qui est impossible}$$

Conclusion : D et D' ne sont pas parallèles.

2°/ On a : D et D' ne sont pas parallèles. Pour que D et D' soient coplanaires il suffit que D et D' soient sécantes en un point I_m

$$\text{donc } \begin{cases} 2\alpha+1 = 2+m\beta \\ -2\alpha-1 = -1-2m\beta \\ \alpha+3 = 5-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1+m\beta & (1) \\ \alpha = m\beta & (2) \\ \alpha = 2-\beta & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow 2\alpha = 1+\alpha \Rightarrow \alpha = 1$

(3) $\Rightarrow \beta = 2-\alpha = 1$ et (2) $\Rightarrow \alpha = m\beta \Rightarrow 1 = m$

D et D' sont coplanaires si et seulement si $m = 1$.

Soit $I(x,y,z)$ le point d'intersection des droites D et D'

On a : $x = 2\alpha + 1 = 3$ car $\alpha = 1$; $y = -2\alpha - 1 = -3$ et $z = \alpha + 3 = 4$

d'où : $I(3,-3,4)$

3°/ a) D étant la droite passant par $E(1,-1,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

On a : $E(1,-1,3)$ vérifie l'équation du plan P_m car :

$m(1) + (-1) + (2 - 2m).(3) + 5m - 5 = m - 1 + 6 - 6m + 5m - 5 = 0$

$\vec{u}$ est un vecteur du plan P_m car : $m(2) - 2 + (2 - 2m)1 = 0$ d'où $D \subset P_m$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, voyons si $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur de P_m.

on a : $m(3) + (-3) + (2 - 2m).4 = 3m - 3 + 8 - 8m = 5 - 5m$

$\overrightarrow{OI}$ est un vecteur du plan P_m si et seulement si $5 - 5m = 0$ donc $m = 1$

Si $m = 1$: $(\overrightarrow{OI})$ // P_m et $O \in P_m$ donc (OI) est incluse dans le plan P_m et par suite $(OI) \cap P_m = (OI)$.

Si $m \neq 1$: (OI) n'est pas parallèle à P_m donc $(OI) \cap P_m = \{ J_m \}$

Soit (x,y,z) les coordonnées du point J_m.

$J_m \in (OI) \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ_m} = \alpha\ \overrightarrow{OI}$ d'où $\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$

$J_m \in P_m$ donc : $mx + y + (2 - 2m)z + 5m - 5 = 0$

On a ainsi : $m(3\alpha) + (-3\alpha) + (2 - 2m)(4\alpha) + 5m - 5 = 0$

$$\alpha(3m - 3 + 8 - 8m) = 5 - 5m \text{ d'où } \alpha = 1$$

et par suite $J_m(3,-3,4)$ d'où $(OI) \cap P_m = \{J_m(3,-3,4)\} = \{I\}$.

Conclusion : Si $m = 1$ on a : $(OI) \cap P_m = (OI)$.

Si $m \neq 1$ on a : $(OI) \cap P_m = \{I\}$.

Solution 6 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 3\\-3 & -2\end{vmatrix} = 7 \neq 0$ donc A,B,C ne sont pas alignés.

2) a) $\vec{u}$

$\begin{vmatrix}-3 & -2\\0 & -1\end{vmatrix} = 3$, $-\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 3\\-3 & -2\end{vmatrix}$ d'ou $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}$ représente un vecteur normal à P

c) $P: -3x + y + 7z + d = 0$ or $A(0,2,3) \in P$

d) d'ou $0+2+21+d = 0 \Rightarrow d = -23$

$P: -3x + y + 7z - 23 = 0$

3) On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3+6}{\sqrt{10}\times\sqrt{14}} = \dfrac{9}{2\sqrt{35}}$

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.|\sin\alpha|$

$\sqrt{9+1+49} = \sqrt{1+9}.\sqrt{9+4+1}.|\sin\alpha|$ d'ou $(\sin\alpha) = \dfrac{\sqrt{59}}{4\sqrt{35}}$

Solution 7 :

1°/ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\\z\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix}y & y+2\\z-1 & z\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}x-2 & x-3\\z-1 & z\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}x-2 & x-3\\y & y+2\end{vmatrix}\vec{k}$

D'où : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = (y-2z+2)\vec{i} - (x+z-3)\,\vec{j} + (2x+y-4)\vec{k}$

2°/

$\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$

$$\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-8 \\ z+4 \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} y-2z+2 = x-2 \\ -x-z+3 = y-8 \\ 2x+y-4 = z+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z = 4 \ (1) \\ x+y+z = 11 \ \ (2) \\ 2x+y-z = 8 \ \ (3) \end{cases}$$

(1) : $x = 4 + y - 2z$

(2) s'écrit : $4 + y - 2z + y + z = 11$

$2y - z = 7$

$z = 2y - 7$

(3) : $2(4 + y - 2z) + y - z = 8$

$3y - 5z = 0$

$3y - 5(2y - 7) = 0$

$-7y + 35 = 0$ d'où $y = 5$

D'où : $z = 3$ et par suite $x = 4+5-6 = 3$ d'où N (3,5,3)

3°/Soit V le volume du tétraèdre ABCN est : $V = \dfrac{\left|(\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB}).\overrightarrow{NC}\right|}{6}$

On a : $S = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB}\right\|$: l'aire du triangle ABN

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CN}\right\| = \frac{1}{2}CN$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CN\right).CN = \frac{1}{6}CN^2$$

($\overrightarrow{CN}$ est $\perp$ au plan ABN au point N) .

Solution 8 :

G centre de gravité de ABC

On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

D'où G$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ d'où $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ d'où $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AC}$

(OG) est perpendiculaire au plan ABC

2°/ $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées (X ,Y , Z)

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$Y = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$Z = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

D'où $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ est un vecteur normal au plan P = (A'B'C')

D'où $\overrightarrow{N}$ (6,6,4)

D'où P : $6x + 6y + 4z + d = 0$

Or A' (2,0,0) $\in$ P

alors $12 + 0 + 0 + d = 0$

$d = -12$

ainsi P' : $3x + 3y + 2z - 6 = 0$.

3°/ (AC) $\cap$ P' ?

On a : (1) $\begin{cases} 3x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ x = 1 - \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Une représentation paramétrique de (AC) est

$(AC) : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$

D'où : (1) s'écrit : $3 - 3\alpha + 2\alpha - 6 = 0$

$\alpha = -3$

Conclusion :

(AC) $\cap$ P' = { K (4,0,3) }

Solution 9 :

1°/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\\-7\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-5\\-2\end{pmatrix}$

$X_0 = \begin{vmatrix}-6 & -5\\-7 & -2\end{vmatrix} = 12 - 35 = -23$

$Y_0 = -\begin{vmatrix}-1 & -3\\-7 & -2\end{vmatrix} = -(2-21) = 19$

$Z_0 = \begin{vmatrix}-1 & -3\\-6 & -5\end{vmatrix} = 5 - 18 = -13$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-23\\19\\-13\end{pmatrix}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-23)^2+19^2+(-13)^2}$

$= \sqrt{1059}$

L'aire du triangle ABC est $A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1059}$.

2°/ a) *$M\in(E) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}) = \vec{O}$

Soit G le barycentre des points (A ,1) ; (B , 2) ; (C,3)

On a : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$

$M\in(E) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge(6\overrightarrow{MG}) = \vec{O} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MG} = \vec{O} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ O , M , G sont alignés $\Leftrightarrow$ M$\in$ (OG)

E = (OG)

b) * M $\in$ (F) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \vec{O}$

Or $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC}$

$= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{V}$

• M $\in$ (F) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires

(F) est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{V}$.

Solution 10 :

1°/ On a : B (1,0,0) , K$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, I $(\frac{1}{2},0,1)$, G (1,1,1)

$$\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix} \;;\; \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\-1\end{pmatrix} \;;\; \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Soit (x_0 , y_0 , z_0) les coordonnés de $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

$$X_0 = \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} = -1$$

$$Y_0 = -\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$Z_0 = \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\1 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

d'où $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BK}$

2°/ L'aire du triangle IGA est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\right\|$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BK}\right\|$$

or $BK^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$

d'où $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

3°/ Le volume V du tétraèdre ABIG est

$$V = \frac{1}{6}\left\|(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}).\overrightarrow{IB}\right\|$$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BK}$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{IB}\right|$$

Or $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{BK} \,.\, \overrightarrow{IB} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}}$$

4°/ La distance du point B au plan AIG est la hauteur h du tétraèdre ABIG associe à la base IGA

$$V = \frac{1}{3}h \times \mathcal{A} \quad \text{d'où } h = \frac{3V}{\mathcal{A}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Solution 11 :

1°/ $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{O} + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}$

(on a : $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ car I, A ,B sont alignés)

2°/ $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \text{MI . AB} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| = \text{MI . AB}$

$\text{MI . AB}\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB}}\right)\right| = \text{MI . AB} \Leftrightarrow \left|\sin(\widehat{MIA})\right| = 1$ ou M = I

.

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{MIA}) = 0$ ou M = I où $\widehat{MIA} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IA}$ d'où Γ est le plan passant par I et ⊥ (IA)

D'où Γ est le plan médiateur de [AB]

Solution 12 :

1°/a) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ le déterminant $\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B, et C ne sont pas alignés.

b) Soit P' le plan dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 2 = 0$.

Les coordonnés de A , B et C vérifient l'équation de P' donc ces trois points appartiennent à P' d'où P' = P et par suite une équation cartésienne de P est $x + y + z - 2 = 0$.

c) S est tangente à P donc le rayon de S est $r = d(O, P) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

d'où S : $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{4}{3}$.

2°/a) $S_\alpha = \{M \in \xi \ / \ ME^2 + \overrightarrow{ME} . \overrightarrow{EF} = 0\}$

$M \in S_\alpha \Leftrightarrow ME^2 + \overrightarrow{ME} . \overrightarrow{EF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} .(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} . \overrightarrow{EF} = 0$ ⇔ M appartient à la sphère de diamètre [EF] .

<u>Conclusion</u> : S_α est la sphère de diamètre [EF] .

b) Soit J_α le centre de S_α, on a $J_\alpha = E*F$ donc $J_\alpha(-\alpha, 0, \alpha)$

on a d'une part $d(J_\alpha, P) = \dfrac{|-\alpha+0+\alpha-2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et d'autre part le rayon

de S_α et $r_\alpha = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{3}})^2}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ d'où $d(J_\alpha, P) = r$ ce qui prouve que S_α est tangente à P .

c) * Déterminons les coordonnées de I .

I(x,y,z) est tel que $\begin{cases} \vec{OI} = \alpha_1 \vec{n} \\ I \in P \end{cases}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ le vecteur normal de P d'où

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_1 \\ z = \alpha_1 \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \alpha_1 \\ 3\alpha_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2}{3} \\ x = y = z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

d'où $I(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

* Déterminons les coordonnées de J

J(x,y,z) est tel que $\begin{cases} \vec{J_\alpha J} = \beta \vec{n} \\ J \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\alpha = \beta \\ y = \beta \\ z-\alpha = \beta \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta-\alpha \\ y = \beta \\ z = \beta+\alpha \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$

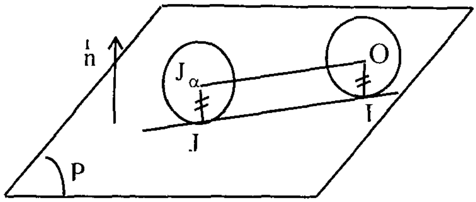
En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs valeurs on obtient $\beta-\alpha+\beta+\beta+\alpha-2=0$ d'où $3\beta = 2 \Rightarrow \beta = \dfrac{2}{3}$

d'où $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}-\alpha \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{2}{3}+\alpha \end{cases}$ donc $J(\frac{2}{3}-\alpha, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}+\alpha)$

$IJ = \sqrt{2} \Leftrightarrow IJ^2 = 2 \Leftrightarrow (\frac{2}{3}-\alpha-\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3}-\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3}+\alpha-\frac{2}{3})^2 = 2$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$

<u>$2^{ème}$ méthode</u> :



On a : $OI = \frac{2}{\sqrt{3}} = JJ_\alpha$ on a d'une part : $\vec{OI}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et

d'autre part $\vec{JJ_\alpha}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et par suite $(OI) // (JJ_\alpha)$

$\vec{OJ_\alpha}\begin{pmatrix}-\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix}$ est $\perp$ $\vec{n}$ car : $\vec{OJ_\alpha}\cdot\vec{n} = 0$ donc $(OJ_\alpha) // P$ et par suite

$OIJJ_\alpha$ est un rectangle d'ou : $OJ_\alpha = IJ$ et comme $OJ_\alpha = \sqrt{2\alpha^2}$ d'où

$IJ = \sqrt{2}|\alpha|$

$IJ = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$

Solution 13 :

$\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **Erreur ! Signet non défini.** et $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ on a :

$\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc A,B et C ne sont pas alignés.

<u>Conclusion</u> : A, B et C déterminent un plan P.

2°/a) $\vec{N}\cdot\vec{AB} = 0$ et $\vec{N}\cdot\vec{AC} = 0$ donc $\vec{N} \perp \vec{AB}$ et $\vec{N} \perp \vec{AC}$

b) $\vec{N}$ étant un vecteur normal de P donc $P : x + y + z + d = 0$

or $A \in P \Rightarrow d = -2$

Conclusion : P est : $x + y + z - 2 = 0$.

3°/a) On a : $H \in P$ et $\vec{OH} = \frac{2}{3}\vec{N}$ donc $(OH) \perp P$

d'où : H est le projeté orthogonal de O sur P.

b)

* $\vec{HA}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a : $\vec{HA} . \vec{BC} = 0$.

* $\vec{HB}\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a : $\vec{HB} . \vec{AC} = 0$.

On a ainsi H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°/ $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

où $R = d(O,P) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ d'où $S : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}$

5°/a) $P : x + y + z - 2 = 0$ et $P_m : x + y + z - m = 0$

On a : $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{m}$ (car $m \in]0,2[$)

d'où P et P_m sont strictement parallèles.

b) Soit $d = d(O,P_m) = \frac{m}{\sqrt{3}}$

$R^2 - d^2 = \frac{4}{3}$ –**Erreur ! Signet non défini.** $= \frac{(2-m)(2+m)}{3} > 0$ car 0

$< m < 2$

d'où $S \cap P_m$ est un cercle (C_m).

c) * Le rayon de C_m est $r = = \sqrt{\frac{4-m^2}{3}}$

* Soit Ω_m le centre de C_m on a : $\vec{O\Omega_m} = \alpha\, \vec{N}_{P_m}$ et $\Omega_m \in P_m$

On a : $\overrightarrow{O\Omega_m}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\alpha\ \overrightarrow{N}_{Pm}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

d'où : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ et $\Omega_m \in P_m$ d'où : $\alpha + \alpha + \alpha - m = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{m}{3}$

Conclusion : $\Omega_m\left(\frac{m}{3}, \frac{m}{3}, \frac{m}{3}\right)$ est le centre de C_m.

Solution 14 :

1°/

a) $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) + (z^2 + 2z) = 0$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{3}^2$$

(S) est la sphère de centre $\Omega(1,1,-1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

b) $O(0,0,0) \in (S)$

$B(2,2,-2) \in (S)$ car : $(2-1)^2 + (2-1)^2 + (-2+1)^2 = \sqrt{3}^2$

D'où [OB] est une corde de (S)

2°/

a) On a : OMCB est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OB}}(M) = C$

b) M varie sur (S) $\Leftrightarrow$ C vraie sur (S')

$S' = t_{\overrightarrow{OB}}(S)$

Soit $\Omega' = t_{\overrightarrow{OB}}(\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Omega\Omega'}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \\ z'+1 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 3 \\ z' = X - 3 \end{cases}$ d'où $\Omega'(3,3,-3)$

C décrit la sphère (S') de centre $\Omega'(3,3,-3)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

3°/ a)On a : $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$

or : $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CM}$

d'où : $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{A'C}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'M}$

d'où $G = h_{\left(A', \frac{2}{3}\right)}(M)$

b) M varie sur la sphère (S) de centre Ω (1,1,-1) et de rayon $\sqrt{3}$

alors G carie sur la sphère (Γ) de centre $\Omega'' = h_{\left(A', \frac{2}{3}\right)}(\Omega)$ et

de rayon $\frac{2}{3} \times \sqrt{3}$

on a : $\overrightarrow{A'\Omega''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'\Omega}$ soit $\Omega''(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} O(0,0,0) \\ B(2,2,-2) \end{cases} \Rightarrow A'(4,4,-4)$$

on a alors $\begin{cases} x_0 - 4 = \frac{2}{3}(1-4) = -2 \\ y_0 - 4 = \frac{2}{3}(1-4) = -2 \\ z_0 + 4 = \frac{2}{3}((-1)+4) = 2 \end{cases}$

d'où Ω" (2,2,-2)

ainsi G varie sur la sphère (Γ) de centre Ω" (2,2,-2) et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Solution 15 :

1°/ On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de diamètre [AB]

(S) est la sphère de diamètre [AB]

2°/

a) On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM})$

Or O = A*B d'où $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{O}$ d'où $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

b) On a : $h_{(o,\frac{1}{3})}(M) = G$ (d'après a))

Et par suite $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow h_{\left(O,\frac{1}{3}\right)}(M) = G$

3°/ M varie sur la sphère de diamètre [AB]

$\Leftrightarrow$ M varie sur la sphère (S) de centre O et de rayon $\frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow$ G varie sur la sphère S' de centre $h_{\left(O,\frac{1}{3}\right)}(O) = O$ et de rayon $\frac{AB}{6}$

Solution 16 :

1°/ $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A''C'} + \overrightarrow{C'B''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'A'}$

$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{DA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

d'où $\overrightarrow{A''B''} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$

2°/ a) Soit O le centre de h

on a : $\overrightarrow{OA''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OA}$

$4\overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O}$

O représente le barycentre des points (A'' ,4) et (A,1)

b) $\overrightarrow{A''B''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A''O} + \overrightarrow{OB''} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

or $\overrightarrow{OA''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OA}$

d'où : $\overrightarrow{OB''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OB}$

d'où h(B) = B''

- $\overrightarrow{A''C''} = \overrightarrow{A''B'} + \overrightarrow{B'C''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'}$

or $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

d'où $\overrightarrow{A''C''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AC}$ or h(A) = A"

alors h(C) = C" .

c) G centre de gravité du triangle ABC

on a : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{O}$

on a : h(A) = A"

h(B) = B"   soit G' = h(G)

h(C) = C"

d'où : $\overrightarrow{A''G'} + \overrightarrow{B''G'} + \overrightarrow{C''G'} = \vec{O}$

d'où G' est le centre de gravité du triangle A"B"C" .

3°/

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{O} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$= \frac{1}{3}(-4\overrightarrow{OA''} - 4\overrightarrow{OB''} - 4\overrightarrow{OC''}) \quad = \frac{-4}{3}(\overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} + \overrightarrow{OC''})$

$= \frac{-4}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB'})$

D'où $\overrightarrow{OG} = \frac{-4}{3}(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OA'})$

$\overrightarrow{OG} = \frac{-4}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{3}(3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{3}(3\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OG}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow$ O , D , G sont alignés .

Solution 17 :

1°/ On a : $t_{\overrightarrow{(AB)}}(M)=N \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow ABNM$ *est un parallélogramme*.

on a : I = B * M d'où I = A*N

on a : $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$

d'où N = $h_{(A,2)}(I)$

2°/

a) on a : $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{O} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} + 3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{O}$

d'où $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB})$

or I = B*M d'où : $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O}$ et par suite $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$

b) On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

3°/ a)On a : I = B*M $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow$ I = $h_{(B,\frac{1}{2})}(M)$

M varie sur la sphère (S) de centre O et de rayon r alors

I varie sur la sphère (S') de centre O' = $h_{(B,\frac{1}{2})}(O)$ et de rayon r' = $\left|\frac{1}{2}\right| r = \frac{r}{2}$

b) $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow h_{(A,\frac{4}{3})}(I) = G$

I varie sur la sphère S'' de centre O'' = $h_{(A,\frac{4}{3})}(O')$ et de rayon r'' = $\frac{2}{3}$r

Solution 18 :

1°/ Soit G' = $f(G)$

on a : $\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{O}$

d'où G = G'

et par suite $f(G) = G$ donc G est un point invariant par f .

2°/ $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}$

d'où $\overrightarrow{GM} = -4\overrightarrow{GM}$

On a : $\overrightarrow{GM} = -4\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow$ h(G , -4) (M) = M'

et par suite f est l'homothétie de centre G et de rapport -4 .

3°/ a) φ = h (G,k)

f = h(G,-4)

b) $\varphi = f^{-1} \Leftrightarrow \varphi \circ f = id_{\xi}$ d'où -4k = 1 et par suite k = $\frac{-1}{4}$

4°/ MM' = 2 $\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 2 \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB}\right\| = 2$

$\Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 2 \Leftrightarrow$ GM = $\frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow$ M $\in$ S(G, $\frac{2}{5}$)

(E) est la sphère de centre G et de rayon $\frac{2}{5}$.

DEVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$ - IDENTITE DE BEZOUT

Résultats à retenir :

Divisibilité

1° / Soit a un entier et d un entier non nul .

On dit que d est un diviseur de a ou que a est divisible par d , s'il existe un entier q tel que a = dq .

2°/ Soit d un entier non nul et a un entier .

Si d divise a alors –d divise a .

Les multiples de d sont les éléments de l'ensemble $d\mathbb{Z} = \{ dq , q \in \mathbb{Z} \}$

3°/Soit a et b deux entiers non nuls et c un entier .

Si a divise b et b divise a , alors a = b ou a = -b .

Si a divise b et b divise c , alors a divise c .

Si a divise b et a divise c , alors a divise $\alpha b + \beta c$ pour tous entiers α et β .

4°/ Soit a et b deux entiers avec b non nul .

On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante

q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$ si b > 0 ,

q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$ si b < 0 .

5°/soit a et b deux entiers avec b non nul .

on appelle reste de a par b l'entier r tel que r = a – bq , où q est le quotient de a par b .

pour tout entier a et pour tout entier b non nul , il existe un couple unique d'entiers (q , r) tel que

$a = bq + r$ et $0 \leq r \leq |b|$.

Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul b est un élément de l'ensemble $\{ 0 , 1 , 2 , \ldots , \leq |b| - 1 \}$.

Congruence

Soit n un entier naturel et non nul et a et b deux entiers .

1°/On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congrus modulo n) si a – b est un multiple de n . on note alors $a \equiv b \pmod{n}$.

2°/ Soit n un entier naturel non nul .

Pour tout entier a , il existe un unique entier r appartenant à $\{ 0 , \ldots, n - 1\}$ tel que $a \equiv r \pmod{n}$. On dit que r est le reste modulo n de a .

3°/Soit n un entier naturel non nul .

Deux entiers sont congrus modulo n , si et seulement si , ils ont le même reste modulo n .

4°/Soit a , b et c trois entiers et n un entier naturel non nul .

$a \equiv a \pmod{n}$

Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $b \equiv a \pmod{n}$

Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}$, alors $a \equiv c \pmod{n}$.

5°/Soit a , b , c et d quatre entiers et n un entier naturel non nul .

Si $a \equiv b \pmod{n}$ et si $c \equiv d \pmod{n}$, alors

$a + c \equiv b + d \pmod{n}$ et $a \times c \equiv b \times d \pmod{n}$.

Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $ha \equiv hb \pmod{n}$ pour tout entier h et

$am \equiv bm \pmod{n}$ pour tout entier $m > 0$.

PGCD , PPCM de 2 entiers

1°/Si a et b sont deux entiers non nuls , alors il existe un unique entier naturel d sui vérifie les deux conditions suivantes :

d divise a et d divise b ,

Si un entier k divise a et b alors il divise d .

L'entier d défini plus haut est noté a $\wedge$ b et appelé le plus grand commun diviseur de a et b .

Pour tous entiers a et b non nuls , a $\wedge$ b est un entiers naturel non nul .

Pour tous entiers a et b non nuls , a $\wedge$ b = $|a| \wedge |b|$

2°/ Soit a et b deux entiers non nuls .

Si b divise a alors a $\wedge$ b = $|b|$.

Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo b de a alors a $\wedge$ b = b $\wedge$ r

.

a $\wedge$ b = b $\wedge$ a .

pour tout entier non nul k , ka $\wedge$ kb = $|k|$(a $\wedge$ b) .

a $\wedge$ (b $\wedge$ c) = (a $\wedge$ b) $\wedge$ c .

3°/ Deux entiers non nuls a et b sont dits premiers entre eux , si a $\wedge$ b = 1 .

Soit a et b deux entiers non nuls . Alors il existe un unique couple d'entiers (a',b') tel que a = (a $\wedge$ b)a' , b = (a $\wedge$ b)b' et a' $\wedge$ b' = 1 .

4°/

Lemme de Gauss : Soit a , b et c trois entiers non nuls . Si a $\wedge$ b = 1 et a divise bc alors a divise c .

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier.

Si a $\wedge$ b = 1 , n = 0 (mod a) et n = 0 (mod b) alors n = 0 (mod ab) .

5°/ Pour tous entiers a et b non nuls il existe un unique entier m strictement positif qui vérifie les deux conditions suivantes.

* m est un multiple de a et b ,

* tout multiple commun de a et b est un multiple de m .

L'entier m ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b et est notée $a \vee b$.

Pour tous entiers a et b non nuls , $a \vee b = |a| \vee |b|$

Pour tous entiers a et b non nuls , $(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|$

6°/Soit a et b deux entiers non nuls .

Si b divise a alors $a \wedge b = |a|$

Pour tout entier non nul k , $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$.

$a \wedge b = b \wedge a$.

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

7°/ Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.

Alors il existe un unique entier non nul u appartenant à $\{0,1,\dots, b-1\}$ tel que $au \equiv 1 \pmod b$. On dit que u est un inverse de a modulo b .

<u>Théorème de Bezout</u>

1°/ Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux , si et seulement si , il existe deux entiers u et v tels que au + bv = 1 .

2°/ Soit a et b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$. Alors il existe deux entiers u et v tels que au + bv = d .

3°/ Soit a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$. l'équation ax + by = c admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si et seulement si , d divise c .

EXERCICES

Exercice 1 :

1°/ Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturels n , le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n

2°/ Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* : 22^{9n+2} - 31^{3n.1}$ est divisible par 9

Exercice 2 :

1°/ Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes dans la division par 7 des entiers naturels suivant 2^n et 3^n

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers naturels n vérifiant : $2^n + 3^n \equiv 0\ (7)$

Exercice 3 :

1°/ x et y étant deux entiers relatifs déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par 4 du nombre $x^2 - 3y^2$

2°/ Existe-t-il trois entiers relatifs x , y ,z tel que $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$

Exercice 4 :

Démontrer que

$\forall n \in \mathbb{N} :\quad n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel

On pose $a = 2n + 8$, $b = 3n + 15$

Soit δ = le P.G.C.D de a et b

1°/ Montrer que δ divise 6

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

PGCD (2n+8 , 3n+15) = 6

Exercice 6 :

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

PGCD ($(5n^3 - n)$, $n+2$) = PGCD ($n+2,38$)

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$(n+2)$ divise $(5n^3 - n)$

3°/ Déterminer les valeurs possibles du PGCD de $Sn^3 - n$ et $n+2$?

4°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$Sn^3 - n \wedge n + 2 = 19$$

Exercice 7 :

1°/ Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de

40425

2°/ Soit x et y deux entiers naturels non nuls .

On note d = PGCD (x , y)

m = PPCM (x , y)

Déterminer x et y sachant que $m^2 - 3d^2 = 40425$

Exercice 8 :

1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 11y = 4$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3u = 1 (\text{mod } 5) \\ 7u = 9 (\text{mod } 11) \end{cases}$

Exercice 9 :

1°/

Soit $\mathbb{Z}$ l'équation : $7x - 3y = 1$

a) Montrer que (E) possède des solutions.

b) Résoudre (E).

c) Montrer que si le couple (x,y) est solution de (1) alors x et y sont premiers entre eux .

2°/ Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant la relation (E) : $7a - 3b = 29$

a) On désigne par D : le plus grand commun diviseur de a et b

Monter que les seules valeurs possibles de D sont 1 et 29

b) Résoudre : $\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ D = 29 \end{cases}$

c) Soit M le petit commun multiple de a et b

Résoudre : $\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ D = 29 \\ M = 1044 \end{cases}$

3°/ Résoudre : $\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

Exercice 10 :

$(x , y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $x \leq y$

on pose $d = x \wedge y$

$m = x \vee y$

on suppose que : $m + 10\,d = 142$ (*)

1°/ Montrer que les seules valeurs possibles de d sont 1 ou 2

2°/ Trouver les couples (x,y) vérifiant (*)

Exercice 11 :

1°/ Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276

2°/ Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand diviseur commun d et le plus petit multiple commun m vérifient :

$\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$

Exercice 12 :

1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : 5x - 3y = 2$$

2°/ Résoudre

$$(S) : \begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$$

Exercice 13 :

$$U_n = n^4 + n^2 + 1 \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

1°/ Montrer que U_n est produit de deux facteurs de second degré

2°/ Montrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux

3°/ U_n peut-il être premier ?

Exercice 14 :

Démontrer que :

1°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 2^{10n+3} + 3^{5n+3} - 2 \equiv 0 \ (11)$

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad n^7 - n \equiv 0 \ (42)$.

Exercice 15 :

1°/ Enoncer le petit théorème de Fermat

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que : $(n+1)^{17} \equiv 2 \ (17)$

3°/ Résoudre le système $\begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2(17) \\ (n+3)^{13} \equiv 5(13) \end{cases}$

Exercice 16 :

On considère deux entiers naturels non nuls a et b tels que : $a + b = 23$

1°/ Montrer que a et b sont premiers entre eux

2°/ En déduire a et b sachant que $a < b$ et PPCM (a,b) = 126

3°/

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $9U - 14V = 1$

b) (S) : $\begin{cases} x \equiv 4(9) \\ x \equiv 5(14) \end{cases}$ Résoudre (S)

Exercice 17 :

1°/Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation en (u , v)

$$7u - 9v = 3$$

2°/Un entier A , divisé par 7 donne pour reste 2 ce même nombre divisé par 9 donne pour reste 5

a) Quel reste donne-t-il si on le divise par 63

b) Trouver A sachant ; $1920 < A < 2030$

c) Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que : $A^n = 1\ (9)$

Exercice 18 :

$n \in \mathbb{N}^*$; $A = 3n + 1$; $B = 5n - 1$

1°/ Montrer que $A \wedge B$ est un diviseur de 8

2°/Déterminer l'ensemble des entiers n tel que : $A \wedge B = 8$

Exercice 19 :

n un entier naturel ≥ 2

on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_n) : $x - ny = 2$

1°/Résoudre (E_n)

2°/Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes

a) $\begin{cases} x - ny = 2 \\ PGCD(x, y) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - ny = 2 \\ x \equiv y + 1(n) \end{cases}$

Exercice 20 :

Soit $x \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n = x^n - 1$

1°/ Montrer que :

a) PGCD $(U_n , U_{n+1}) = x - 1$

b) Trouver x tel que U_n et U_{n+1} soient premiers entre eux .

2°/ Montrer que si d est un diviseur positif de n alors U_d est un diviseur de U_n .

3°/ Soit n , $m \in \mathbb{N}^*$ et δ = PGCD (n,m)

a) Montrer qu'il existe p et q entiers vérifiant : $\delta = mp - nq$

b) En déduire que : $U_\delta = U_{mp} - U_{nq}\,(U_\delta + 1)$

c)Monter que : $U_{nq} \wedge U_{mq} = U_\delta$

d) Monter que : $U_n \wedge U_m = U_\delta$

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ $4^0 \equiv 1 \pmod 9$

$4^1 \equiv 4 \pmod 9$

$4^2 \equiv 7 \pmod 9$

$4^3 \equiv 1 \pmod 9$

d'où $4^{3p} \equiv 1 \pmod 9$

$4^{3p+1} \equiv 4 \pmod 9$

$4^{3p+2} \equiv 7 \pmod 9$

les restes possibles de la division euclidienne par 9 de 4^n sont 1 ,4,7 .

2°/ on a : $22 \equiv 4 \pmod 9$

$31 \equiv 4 \pmod 9$

d'où : $22^{9n+2} - 31^{3n-1} \equiv 4^{9n+2} - 4^{3n-1} \pmod 9 \equiv 4^{3(3n)+2} - 4^{3(n-1)+2} \pmod 9$

$\equiv 7 - 7 \pmod 9 \equiv 0 \pmod 9$

conclusion : pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^* : 22^{9n+2} - 31^{3n-1} \equiv 0 \pmod 9$

Solution 2 :

1°/

- $2^0 \equiv 1 \pmod 7$; $2^1 \equiv 2 \pmod 7$

D'où $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $2^{3p} \equiv 1 \pmod 7$

$2^{3p+1} \equiv 2 \pmod 7$

$2^{3p+2} \equiv 4 \pmod 7$

Les restes possibles dans la division par 7 de 2^n sont 1 ,2 , 4

- $3^0 \equiv 1 \pmod 7$ $\quad$ $3^3 \equiv -1 \pmod 7$

$3^1 \equiv 3 \pmod 7$ $\quad$ $3^6 \equiv 1 \pmod 7$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$

On a :

$3^{6p} \equiv 1 \pmod 7$; $3^{6p+1} \equiv 3 \pmod 7$; $3^{6p+2} \equiv 2 \pmod 7$

$3^{6p+3} \equiv 6 \pmod 7$; $3^{6p+4} \equiv 4 \pmod 7$; $3^{6p+5} \equiv 5 \pmod 7$

Les restes possibles dans la division par 7 de 3^n sont : 1,2,3,4,5,6.

2°/ Si $n = 6p \Rightarrow 2n + 3n \equiv 26p + 36p$

$$\equiv (2^{3p})^2 + 3^{6p} \pmod 7 \equiv 1 + 1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$$

Si $n = 6p + 1 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 2 + 3 \equiv 5 \pmod 7$

Si $n = 6p + 2 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 2 \equiv 6 \pmod 7$

Si $n = 6p + 3 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 1 + 6 \equiv 0 \pmod 7$

Si $n = 6p + 4 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 4 \equiv 1 \pmod 7$

Si $n = 6p + 5 \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 4 + 5 \equiv 2 \pmod 7$

Conclusion : $2^n + 3^n \equiv 0\ (7)$ ssi $n = 6p + 3$ où $p \in \mathbb{N}$

Solution 3 :

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod 4$ ou $x \equiv 1 \pmod 4$ ou $x \equiv 2 \pmod 4$

ou $x \equiv 3 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ ou $x^2 \equiv 0 \pmod 4$

ou $x^2 \equiv 9 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$

d'où : pour tout $x \in \mathbb{Z}$ $x^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$

$x^2 - 3y^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod 4$

$y^2 \backslash x^2$	0	1
0	0	1
1	1	2

(x^2+y^2)

d'où les restes possibles de $x^2 - 3y^2$ sont 0 ou 1 ou 2 .

1°/ Supposons qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

tels que : $x^2 - 3y^2 + 4z = 3 \Rightarrow x^2 - 3y^2 + 4z \equiv \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 - 3y^2 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow$ 3 est le

reste de la division euclidienne de $x^2 - 3y^2$ par 4.

ce qui est impossible d'après 1°/

Solution 4 :

*

- $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ n ≡ 0 (mod 2) ou n ≡ 1 (mod 2)
- n ≡ 0 (mod 2) $\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \equiv 1 (\text{mod } 2) \\ 7n+1 \equiv 1 (\text{mod } 2) \end{cases} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 (\text{mod } 2)$
- n ≡ 1 (mod 2) $\Rightarrow 7n+1 \equiv 1 (\text{mod } 2) \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 (\text{mod } 2)$

conclusion : pour $\forall n \in \mathbb{N}$: n (2n+1) (7n+1) ≡ 0 (mod 2)

*

- n $\in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ n ≡0 (mod 3) ou n ≡ 1 (mod 3) ou n ≡(2) (mod 3)
- n ≡0 (1) ⇔ n (2n+1) (7n+1) ≡ 0(mod 3)
- n ≡ 1(mod 3)⇒ 2n+1 ≡ 0(mod 3)

  d'où n(2n+1) (7n+1)≡ 0(mod 3)
- n≡ 2 (3) ⇒ 7n≡14 (mod 3) ⇒ 7n + 1 ≡ 0(mod 3)

  n(2n+1) (7n+1) ≡ 0(mod 3)

on a : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: n(2n+1)(7n+1) ≡ 0(mod 3)

ainsi on peut écrire : $\begin{cases} n(2n+1)(7n+1) \in M_2 \\ n(2n+1)(7n+1) \in M_3 \end{cases}$

$M_2 \cap M_3 = M_{(2 \vee 3)} = M_6$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: n(2n+1)(7n+1) ≡ 0(mod 6)

Solution 5 :

1°/ δ = P.G.C.D (a,b) $\Rightarrow \delta$ divise a = 2n+ 8 et b = 3n + 5

$\Rightarrow \delta$ divise 2b – 3a c.a.d δ divise 6

2°/ PGCD (2n+8 , 3n+15) = 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+8=6p \\ 3n+15=6q \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3p-4 \\ n=2q-5 \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

$3p - 4 = 2q - 5 \Leftrightarrow 3p - 2q = -1$

$\Leftrightarrow 2q - 3p = 1$ (D'après Bézout : $p \wedge q = 1$)

$2q - 3p = 2\times 2 - 3\times 1$

$2(q-2) = 3(p-1)$

3 divise $2(q-2)$ or $3 \wedge 2 = 1$

d'après le lemme Gauss : 3 divise $q - 2$ &

d'où : $q - 2 = 3k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ d'où $n = 2(3k+2) - 5 = 6k - 1$

$S = \{ 6k - 1 \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \}$

Solution 6 :

1°/ On a : Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38$

$\Rightarrow$ PGCD ($Sn^3 - n$, $n + 2$) = PGCD ($n+2$,38) (d'après l'algorithme d'Euclide)

2°/ $n + 2$ divise $Sn^3 - 4$ signifie

PGCD ($Sn^3 - n$, $n + 2$) = $n + 2$ $\Leftrightarrow$ PGCD ($n + 2$, 38) = $n + 2$

$\Leftrightarrow$ $n + 2$ divise 38

or $D_{38} = \{ 1, 2, 19, 38 \}$

d'où $n \in \{ -1, 0, 17, 36 \}$.

3°/ PGCD ($5n^3 - n$, $n + 2$) = PGCD ($n + 2$, 38) = d

donc d est un diviseur de 38

d'où d = 1 ou 2 ou 19 ou 38

4°/ $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19 \Leftrightarrow (n+2) \wedge 38 = 19$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n+2 = 19p \\ 38 = 19p \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+2 = 19p \\ q = 2 \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+2 = 19p \\ \text{p entre relatif impair} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow n + 2 = 19(2k+1)$ où $k \in \mathbb{Z}$

d'où $n = 38k + 17$

$S = \{ 38k + 17 ; k \in \mathbb{Z} \}$

Solution 7 :

1°/ On a : $40425 = 5^2 \times 7^2 \times 33$

L'ensemble des entiers dont le carré est un diviseur de 40425 est

$\{1,5,7,35\}$

2°/ on a : $m = \alpha d \quad (\alpha \in \mathbb{N}^*)$

d'où $m^2 - 3d^2 = 40425 \Leftrightarrow (\alpha^2 - 3)d^2 = 40425$

$\Rightarrow d^2$ est un diviseur de 40425

$\Rightarrow d \in \{1,5,7,35\}$

si $d = 1 \Rightarrow m^2 = 40428$ ce qui est impossible car $m \notin \mathbb{N}^*$

si $d = 5 \Rightarrow m^2 = 40500 \Rightarrow m \notin \mathbb{N}^*$

si $d = 7 \Rightarrow m^2 = 40572 \Rightarrow m \notin \mathbb{N}^*$

si $d = 35 \Rightarrow m^2 = 44100 = 441 \times 100 = (210)^2$

d'où $m = 210$

on a : $\begin{cases} d = 35 \\ m = 210 \end{cases}$ or $\begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \end{cases}$ *avec* $x' \wedge y' = 1$

de plus $md = xy \Rightarrow m = d\,x'y'$

$x'y' = \dfrac{210}{35} = 6$

$\begin{cases} x'y' = 6 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases} \Rightarrow (x', y') \in \{(1,6);(2,3);(3,2);(6,1)\}$

d'où $(x, y) \in \{(35,210) ; (70,105) ; (105,70) ; (210,35)\}$

Solution 8 :

1°/ On a : $5 \times 3 - 11 \times 1 = 4$

$$5x - 11y = 4 \Leftrightarrow 5x - 11y = 5 \times 3 - 11 \times 1$$

$\Leftrightarrow$ 5 (x – 3) = 11(y - 1) $\Rightarrow$ 11 divise 5(x – 3)

or $11 \wedge 5 = 1$

d'après lemme de Gaus on a : 11 divise (x – 3)

d'où il existe k$\in \mathbb{Z}$ tel que x – 3 = 11k d'où x = 11k +3

2°/ $\begin{cases} 3u \equiv 1(5) \\ 7u \equiv 9(11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 3u \equiv 2(\text{mod } 5) \\ 7\times 8u \equiv 72(\text{mod } 11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \equiv 2(\text{mod } 5) \\ 4 \equiv 6(\text{mod } 11) \end{cases}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(11k+3, 5k+1) \quad ou\ k \in \mathbb{Z}\}$

(2 est un inverse de 3 modulo 5 et 8 est inverse de 7 modulo 11)

Il existe (x , y) $\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\begin{cases} U - 2 = 5x \\ U - 6 = 11y \end{cases}$

ainsi 5x + 2 = U = 11y + 6

d'où 5x +2 = 11y + 6 $\Leftrightarrow$ 5x – 11y = 4

d'après 1) x = 3 + 11k

y = 1+5k ou k $\in \mathbb{Z}$

d'où U = 5(3+11k) + 2 = 17 + 55k

S = { 17 + 55k , k$\in \mathbb{Z}$ }

Solution 9 :

1°/ a) $7 \wedge 3 = 1$

d' après l'entité de Bezout il existe au moins un couple (x_0 , y_0) $\in \mathbb{Z}^2$ /

$7x_0 - 3y_0 = 1$

b) 7x – 3y = 7 × 1 – 3 × 2 $\Leftrightarrow$ 7(x – 1) = 3 (y – 2) $\Leftrightarrow$ 3 devise

7(x – 1) or $7 \wedge 3 = 1$

donc d'après le lemme de Gauss 3 divise (x – 1)

et par suite x – 1 = 3 k ($k \in \mathbb{Z}$) d'où x = 3k + 1

D'où : $7(3k) = 3(y-2) \Rightarrow y = 7k + 2$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3k + 1 , 7k + 2) ;\ k \in \mathbb{Z} \}$

c) (x,y) solution de (E) $\Leftrightarrow$ $7x - 3y = 1$

donc d'après l'identité de Bezout $x \wedge y = 1$

2°/ a) D = pgcd(a,b) donc D divise a et D divise b *et par suite D divise $7a - 3b$, en d'autre termes D devise 2q

D'où D = 1 ou D = 29

b) $\begin{cases} 7a - 3b = 29 & (1) \\ a \wedge b = 29 & (2) \end{cases}$

(2) : $\begin{cases} a = 29a' \\ b = 29b' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

(1) s'ecrit : $7a' - 3b' = 1$ d'où d'après la question 1)

$\begin{cases} a' = 1 + 3k \\ b' = 2 + 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

d'où $\quad a = 29(1+3k) = 29 + 87k$

$\quad\quad b = 29(1+7k) = 58 + 203k$

$S = \{ (29 + 87k , 58 + 203k) ,\ k \in \mathbb{Z} \}$

c) on a : $MD = ab = 29^2 a'b' \Rightarrow a'b' = \dfrac{1044}{29} = 36$

on a aussi : $\begin{cases} 7a' - 3b' = 1 \\ a'b' = 36 \end{cases} \Rightarrow b'(1 + 3b') = 252$

d'où $3b'^2 + b' - 252 = 0$

donc $b' = \dfrac{-52}{6} \notin \mathbb{Z}$ ou $b' = 9$ donc $a' = 4$

$\begin{cases} a = 29a' = 116 \\ b = 29b' = 261 \end{cases}$ $\quad S = \{(116, 261)\}$

3°/ $\begin{cases} 7a - 3b = 29 \quad (*) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

(2,–5) est une solution de (*)

$7a - 3b = 29 \quad \Leftrightarrow \quad 7\,(a - 2) = 3\,(\,b+5)$

$7 \wedge 3 = 1$

d'où $\begin{cases} a=2+3k \\ b= -5 + 7k \end{cases}$ $\quad$ où $\quad k \in \mathbb{Z}$

or $\quad a \wedge b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (2 + 3k) \wedge (7k–5)=1$

$\Leftrightarrow \quad (k - 9) \wedge 29 = 1$ $\quad$ (ceci d'après l'algorithme d'Eclude)

$\Leftrightarrow \quad k - 9 \neq 0 \pmod{29}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{\,(3k + 2\,,\, 7k - 5)$ où $\; k \neq 9 \pmod{29}$ et $k \in \mathbb{Z}\,\}$

Solution 10 :

1°/ On sait que $m = \alpha\, d$ (car d divise m) où $\alpha \in \mathbb{N}$

$m + 10\, d = 142 \quad \Rightarrow \quad d\,(\alpha + 10) = 142$

d'où d est un diviseur de 142

or $142 = 2 \times 71$

d'où d = 1 ou 2 ou 7 ou 142

- Si d = 1 alors m = 132
- Si d = 2 alors m = 122
- Si d = 71 $\Rightarrow$ m < 0 impossible
- Si d = 142 $\Rightarrow$ m < 0

Les valeurs possibles de d sont 1 ou 2

2°/ Si d = 1 $\Rightarrow$ m = 132

or md = ab $\Rightarrow$ ab = 132 avec $a \wedge b = 1$

d'où $(a,b) \in \begin{Bmatrix} (1,132);(3,44);(4,33);(11,12) \\ 132,1);(44,3);(33,4);(12,11) \end{Bmatrix}$

si $d = 2 \Rightarrow m = 122$

or $md = ab \Rightarrow 244 = ab$

or $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

on a : $ab = 244 \Rightarrow d^2a'b' = 244 \quad a'b' = 61$

$\Rightarrow (a',b') = (1,61)$; ou $(61,1)$

et par suite : $(a,b) = (2,132)$ ou $(132,2)$

Conclusion : Les couples solutions de (*) sont :

(1,132) ; (3,44) ; (4,33) ; (11,12) ; (132,1) ; (44,3) ; (33,4) ; (12,11) ; (132,2) : (2,132)

Solution 11 :

1°/On a : $276 = 2^2 \times 3 \times 23$

Le nombre de diviseurs de 276 est 12

La liste des diviseurs positifs de 276 est { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12 ,23 , 46 , 69 , 92 , 138 , 276 }

2°/On a : $m = \alpha d$

$m + 3d = 276 \Rightarrow d(\alpha + 3) = 276$

d'où : d est un diviseur de 276

or $10 < d < 30$

<u>1°cas</u> si <u>$d = 12$</u> $\Rightarrow m = 276 - 36 = 240$

or $md = ab$

or $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad m = d\, a'b'$

d'où : $\begin{cases} a'b' = 20 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$ et par suite {a'b'} = { 1 , 20} ou { 4 , 5}

et par suite {a,b} = { 12 , 240} ou { 48,60}

<u>2°cas</u> $d = 23 \Rightarrow m = 207$ alors $\begin{cases} a'b' = 9 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

$\{a',b'\} = \{1,9\} \Rightarrow \{a,b\} = \{23,207\}$

Conclusion : Les paires solutions du problème posé sont : {12 , 204} ; {48 , 60} ; {23 , 207}

Solution 12 :

1°/ On a : $5 \times 1 - 3 \times 1 = 2$

d'où $5x - 3y = 2 \Leftrightarrow 5x - 3y = 5 \times 1 - 3 \times 1 \Leftrightarrow 5(x - 1) = 3(y - 1)$

or 3 divise $5(x - 1)$ et $3 \wedge 5 = 1$

d'où d'après le lemme de Gauss 3 divise $x - 1$ et par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$x - 1 = 3k$ et par suite $x = 3k + 1$

l'équation s'écrit : $5(3k) = 3(y - 1)$ d'où $y = 5k + 1$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(3k + 1 , 5k + 1)$ où $k \in \mathbb{Z}\}$

2°/ $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 5k + 1 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$

$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow 3k + 1 \wedge 5k + 1 = 2$

ou d'après l'algorithme d'Euclide on a :

$(3k + 1) \wedge (5k + 1) = (3k + 1) \wedge 2k = k + 1 \wedge 2k = (k + 1) \wedge 2$

$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow (k + 1) \wedge 2 = 2 \Leftrightarrow k + 1$ est pair

$\Leftrightarrow k + 1 = 2p \Leftrightarrow k = 2p - 1$ où $p \in \mathbb{Z}$

d'où $x = 3(2p - 1) + 1 = 6p - 2$

$y = 5(2p-1)+1 = 10p-4$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(6p-2\ ,\ 10p-4) \text{ où } p \in \mathbb{Z}\}$

Solution 13 :

1°/ $U_n = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2$

$= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$

2°/ soit $d = (n^2+n+1) \wedge (n^2-n+1) = (n^2-n+1) \wedge 2n$

car : $(n^2+n+1 = (n^2-n+1) \times 1 + 2n)$

si $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow d = (4p^2 - 2p + 1) \wedge 4p$

$= (4p) \wedge (2p-1) = (2p-1) \wedge 2 = 1$ (ceci est d'après l'algorithme d'Euclide)

si $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow d = (2p+1)^2 - (2p+1) + 1 \wedge (2p+1) = (4p^2+2p+1) \wedge (2p+1)$

$= (2p+1) \wedge 1 = 1$

car : $4p^2 + 2p + 1 = 2p(2p+1) + 1$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: n^2+n+1 et n^2-n+1 sont premiers entre eux

3°/ On a : $U_n = (n^2-n+1)(n^2+n+1)$ où $n^2+n+1 \geq 1$.

$$U_n \text{ est premier} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n + 1 = 1 \\ et \\ n^2 + n + 1 \quad \text{premier} \end{cases} \Leftrightarrow n = 1$$

<u>Pour n = 1</u> $\Rightarrow U_n = U_1 = 3$ qui est premier

Conclusion : <u>U_n est premier ssi $n = 1$</u>

Solution 14 :

1°/

- $2^5 \equiv -1 \ (\bmod\ 11)$ d'où $2^{10n} \equiv 1 (\bmod\ 11) \Rightarrow 2^{10n+3} \equiv 8 (\bmod\ 11)$
- $3^5 \equiv 1 (\bmod\ 11) \quad \Rightarrow 3^{5n} \equiv 1 \ (\bmod\ 11) \Rightarrow 3^{5n+3} \equiv 5 (\bmod\ 11)$

d'où : $2^{10n+3} + 3^{5n+3} - 2 \equiv 0 \ (\bmod\ 11)$

2°/

- D'après le petit théorème de Fermat

$$n^7 \equiv n (\bmod\ 7) \text{ car 7 est premier} \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 7)$$

- $n^7 - n = n\,(n^6 - 1) = n\,(n^3 - 1)(n^3 + 1)$

$$= n\,(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

Si $n \equiv 0 (\bmod\ 2) \quad \Rightarrow \quad n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 2)$

$n \equiv 1 (\bmod\ 2) \quad \Rightarrow \quad n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 2)$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} : n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 2)$

- si $n \equiv 0 (\bmod\ 3) \quad \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 3)$

si $n \equiv 1 (\bmod\ 3) \quad \Rightarrow n^7 - n \equiv 1 (\bmod\ 3)$

si $n \equiv 2 (\bmod\ 3) \quad \Rightarrow n^7 \equiv 2^7 \equiv 2 \equiv n \ (\bmod\ 3)$

et par suite $n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 3)$

2 et 3 sont premiers entre eux donc $(n^7 - n) \equiv 0 (\bmod\ 6)$

6 et 7 sont premiers entre eux donc $n^7 - n \equiv 0 (\bmod\ 42)$ car : $\begin{cases} n^7 - n \equiv 0(\bmod \\ n^7 - n \equiv 0(\bmod \end{cases}$

Solution 15 :

1°/ Soit p un nombre premier :

Pour tout $n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n \ (\bmod\ p)$

2°/ 17 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat

$$(n+1)^{17} \equiv (n+1) \ (\bmod\ 17)$$

On a $(n+1)^{17} \equiv 2(17) \quad \Leftrightarrow \quad (n+1) \equiv 2(17) \Leftrightarrow \quad n \equiv 1 (\bmod\ 17)$

D'où $n = 17k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$

3°/ $\begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2(\bmod 17) & (1) \\ (n+3)^{13} \equiv 5(\bmod 13) & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow n = 17k+1$ où $k \in \mathbb{N}$

(2) s'écrit : $(17k+4)^{13} \equiv 5 (\bmod 13) \Leftrightarrow (3k+4)^{13} \equiv 5(\bmod 13)$

or d'après le petit théorème de Fermat : $(3k+4)^{13} \equiv 3k+4 (\bmod 13)$ car 13 est premier

on a ainsi : $3k+4 \equiv 5 (\bmod 13) \Leftrightarrow 3k \equiv 1 (\bmod 13) \Leftrightarrow$

$4 \times 3k \equiv 4(\bmod 13) \Leftrightarrow -k \equiv 4 (\bmod 13)$

$\Leftrightarrow k \equiv -4 (\bmod 13)$

d'où $k \equiv 9 (\bmod 13)$

$k = 13p+9$ où $p \in \mathbb{N}$

conclusion : $n = 17k+1$ où $k = 13p+9$

d'où $n = 17(13p+9)+1$

$n = 221p+154$ où $p \in \mathbb{N}$

Solution 16 :

1°/ $a+b=23$ $(a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*)$

soit $d = a \wedge b$ donc d divise a et d divise b

d'où d divise $(a+b)$ et par suite d divise 23

or $D_{23} = \{1,2,3\}$ et par suite $d = 1$ ou 23

or $\begin{cases} a \in \mathbb{N}^* \\ b \in \mathbb{N}^* \\ a+b=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0<a<23 \\ 0<b<23 \end{matrix}$

d'où $d \neq 23$, $\begin{pmatrix} d \leq a \\ d \leq b \end{pmatrix}$

conclusion : a et b sont premiers entre eux

2°/PPCM $(a,b) = 126 = m$

on sait : $md = ab$ or $d = 1$

d'où $ab = 126$

on a : $\begin{cases} a+b=23 \\ ab=126 \end{cases}$ on a : b = 23 – a

d'où : a (23 – a) = 126

$a^2 - 23a + 126 = 0$

$\Delta = (23)^2 - 4(126) = 529 - 504 = 25$

d'où $a = \dfrac{23-5}{2} = 9$ on a : $a = \dfrac{23+5}{2} = 14$

si a = 9 alors b = 23 – 9 = 14

si a = 14 alors b = 23 – 14 = 5 ce sui si impossible car a < b

conclusion : a = 9 et b = 14

3°/

a) 9u – 14 V = 1

(-3,-2) est une solution de cette équation

on a : 9U – 14V = 9(-3) – 14(-2)

9(U+3) = 14 (V + 2)

or $9 \wedge 14 = 1$ d'après Lemme de Gauss

14 divise (U + 3) et par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$

tel que : U + 3 = 14k

U = 14k – 3

d'autre part : 9(U+3) = 14 (V + 2) $\Rightarrow 9 \times 14k = 14(V+2)$

d'où : V = 9k – 2

$S = \{ 14k-3 , 9k-2)$ où $k \in \mathbb{Z} \}$

b) (S) $\begin{cases} x \equiv 4(9) \\ x \equiv 5(14) \end{cases}$ il existe $(U,V) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$x = 9U + 4$ et $x = 14V + 5$

ainsi 9U + 4 = 14V + 5 et par suite 9U – 14V = 1

d'après 3°/ a) on a : U = 14k – 3 et V = 9k – 2 où $k \in \mathbb{Z}$

et par suite $x = 9(14k-3) + 4 = 126k - 23$ $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}} = \{126k - 23$ où $k \in \mathbb{Z}\}$

Solution 17 :

1°/ $7u + 9v = 3 \Leftrightarrow 7(u-3) = 9(v-2)$

9 divise $7(u-3)$ or $9 \wedge 7 = 1$

d'où d'après le lemme de Gausse 9 divise $(u-3)$

et par suite $u-3 = 9k$ où $k \in \mathbb{Z}$

donc $\underline{u = 3 + 9k}$

$$\begin{cases} 9(v-2) = 7(u-3) \\ u = 3+9k \end{cases} \Rightarrow \quad 9(v-2) = 7(9k)$$

d'où $v = 2 + 7k$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3 + 9k , 2 + 7k) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$

2°/ $\begin{cases} A = 74+2 \\ A = 9v+5 \end{cases}$ d'où $7u + 2 = 9v + 5$

$$7u - 9V = 3$$

or d'après 1°/ $u = 3 + 9k$

$$v = 2 + 7k$$

$A = 7(3+9k) + 2 = 21 + 63k + 2 = 63k + 23$

Le reste de la division euclidienne de A par 63 est 23.

b°/ on a : $\begin{cases} 1920 < A < 2030 \\ A = 63k + 23, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

d'où : $1920 < 63k + 23 < 2030 \Rightarrow 1897 < 63k < 2007$

$$\Rightarrow \frac{1897}{63} < k < \frac{2007}{63} \Rightarrow 30{,}11 < k < 31{,}86$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $k = 31$

conclusion : $A = 63 \times 31 + 23 \qquad A = 1976$

c) $A^n \equiv 1 (\text{mod } 9) \Leftrightarrow 1976^n \equiv 1 (\text{mod } 9)$

on a : $1976 \equiv 5 \pmod 9$

$1976^2 \equiv 7 \pmod 9$

$1976^3 \equiv -1 \pmod 9$

$1976^6 \equiv 1 \pmod 9$

d'où : $(1976^6) \equiv 1 \pmod 9$

d'où $n = 6p$ où $p \in \mathbb{N}$

Solution 18 :

1°/ On a : $d = A \wedge B$

$$\begin{cases} d \text{ divise } A \\ d \text{ divise } B \end{cases} \Rightarrow d \text{ divise } (5A - 3B)$$

or $5A - 3B = 5(3n+1) - 3(5n-1) = 8$

d'ou d divise 8

2°/ $A \wedge B = (3n+1) \wedge (5n-1) = (3n+1) \wedge (2n-2)$

$= (2n-2) \wedge (n+3) = (n+3) \wedge 8$

$(n+3) \wedge 8 = 8 \Leftrightarrow n + 3 = 8k$ où $k \in \mathbb{Z}$

$n = 8k - 3$

$S_{\mathbb{Z}} = \{ 8k - 3 \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \}$

Solution 19 :

1°/ On remarque : $(x_0, y_0) = (2,0)$ est une solution de (E_n)

$(x - x_0) - n(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = ny$

$$\begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (2 + nk, k) ; k \in \mathbb{Z} \}$

$$2°/ * \begin{cases} x - ny = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$$

$x \wedge y = 2 \Leftrightarrow (2 + nk) \wedge k = 2 \Leftrightarrow k \wedge 2 = 2$

$\Leftrightarrow k = 2p$ où $p \in \mathbb{Z}$

d'où $\begin{cases} x = 2 + 2np \\ y = 2p \end{cases}$ où $p \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (2 + 2np , 2p)$

$* \begin{cases} x - ny = 2 \\ x \equiv y + 1 \,(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + nk \\ y = k \\ x \equiv y + 1 \,(n) \end{cases}$

or $x \equiv y + 1 \,(n) \Leftrightarrow 2 + nk \equiv k + 1 \,(n) \Leftrightarrow k \equiv 1 (n)$

d'où $k = np + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$

$S = \{ (2 + n^2p + n , np + 1)$ où $p \in \mathbb{Z} \}$

Solution 20 :

1°/ a) $U_n \wedge U_{n+1} = (x^n - 1 , x^{n+1} - 1)$

or on a : $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x + 1)$

d'où $U_n \wedge U_{n+1} = (x^n - 1) \wedge (x - 1) = x - 1$

car : $x^n - 1 = (x - 1)\ (x^{n-1} + x^{n+2} + ... + x + 1)$

Conclusion : $U_n \wedge U_{n+1} = x - 1$

b) U_n et U_{n+1} sont premieres entre eux ssi $x - 1 = 1$

d'où $x = 2$

2°/ d est une diviseur de n $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kd$

$U_n = U_{kd} = x^{kd} - 1 = (x^d) - 1) = (x^d)^k - 1)\ ((x^d)^{k-1} + (x^d)^{k-2} + ... + x + 1)$

d'où U_d est un diviseur de U_n

3°/ $\delta = n \wedge m$

a) d'après l'identité de Bezout il existe (p,q) tel que : $mp - nq = \delta$

b) $U_{mp} - U_{nq}(U_\delta + 1) = U_{mp} - U_{nq}(x^\delta)$

$$= x^{mp} - 1 - (x^{nq} - 1)x^{\delta}$$

$$= x^{mp} - 1 - x^{nq+\delta} + x^{\delta} = x^{\delta} - 1 = U_{\delta}$$

c) $\Delta = U_{nq} \wedge U_{mp}$

$\Rightarrow \Delta$ divise U_{nq} et U_{mp}

$\Rightarrow \Delta$ divise $U_{mp} - U_{nq}(U_{\delta} + 1)$

d'où Δ divise U_{δ}

$$* \delta = n \wedge m \Rightarrow \delta \text{ divise } n \text{ et } \delta \text{ divise } m \Rightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } nq \\ \delta \text{ divise } mp \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } U_{nq} \\ U_{\delta} \text{ divise } U_{mp} \end{cases}$$

d'où U_{δ} divise $U_{nq} \wedge U_{mp} = \Delta$

$$\text{conclusion : } \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } \Delta \\ \Delta \text{ divise } U_{\delta} \end{cases} \Rightarrow \Delta = U_{\delta}$$

d) $$\delta = n \wedge m \Rightarrow \begin{cases} \delta \text{ divise } n \\ \delta \text{ divise } m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\delta} \text{ divise } U_n \\ U_{\delta} \text{ divise } U_m \end{cases}$$

donc U_{δ} divise $(U_n \wedge U_m)$

$$\text{Soit } \gamma = p\gcd(U_n, U_m) \Rightarrow \begin{cases} \gamma \text{ divise } U_n \\ \gamma \text{ divise } U_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \text{ divise } nq \\ n \text{ divise } mp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n \text{ divise } U_{nq} \\ U_n \text{ divise } U_{mp} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma \text{ divise } U_{nq} \\ \gamma \text{ divise } U_{mp} \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ divise } U_{nq} \wedge U_{mp}$$

et par suite γ divise U_{δ}

conclusion : $U_n \wedge U_m = U_{\delta}$

PROBABILITES

Résultats à retenir :

1°/ Soit $E = \{ a_1 , a_2 , \ldots, a_n \}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul .

- Le nombre des p- uplets d'éléments de E est l'entier n^p .
- Le nombre de n- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier n !
- Si $1 \leq p \leq n$ alors
  ▪Le nombre des p- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$,
  ▪Le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

(l'entier C_n^p est aussi noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et on convient que $C_n^0 = 1$).

2°/Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible .

L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers

.

Les éléments de E sont appelés évènements élémentaires .

Une partie A de E est appelée évènement .

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire et P(E) l'ensemble des évènements de E .

On appelle probabilité sur E , toute application p , de P(E) dans [0,1] vérifiant les conditions ci-dessous .

- L'image p(E) de E est égale à 1 .
- L'image p ($\varnothing$) de l'ensemble vide est égale à 0
- L'image p(A) d'un évènement A , est la somme des images des évènements élémentaires de A , c'est-à-dire p(A) = $\sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

3°/ Soit (E ,P(E), p) un espace probabilisé et A et B deux évènements de E .

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- si $A \cap B = \varnothing$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- si A1 , A2 , ……, Ak sont des évènements deux à deux incompatibles ,

alors $p(A1 \cup A2 \cup \ldots \cup Ak) = p(A1) + p(A2) + \ldots + p(Ak)$.

4°/soit E l'univers d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et P(E) l'ensemble des parties de E .

l'application p définie de P(E) dans [0,1] par p(a) = $\dfrac{1}{card(E)}$, pour tout évènement élémentaire a de E est une probabilité sur E , appelée probabilité uniforme .

5°/si (E , P(E) , p) est un espace probabilisé tel que la probabilité p est uniforme , alors p(A) = $\dfrac{card(A)}{card(E)}$, pour tout évènement A de E .

6°/Soit (E, p(E) ,p) un espace probabilisé B un évènement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B de P(E) dans [0,1] , définie par $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$,

pour tout évènement A , est une probabilité sur E .

Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé et B un évènement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B ainsi définie s'appelle probabilité B-conditionnelle .

Le réel $p_B(A)$ est noté p (A/B) (on lit « probabilité de A , sachant B ») .

7°/On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Dans le cas où $p(B) \neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A , c'est-à-dire p(A/B) = p(A)

8°/ Soit E un ensemble fini , les parties B1 ,B2 ,...., Bn forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E .

Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé ,

B1,B2,.....,Bn des évènements formant une partition de E tels que pour tout i , $p(Bi) \neq 0$.

Alors pour tout évènement A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A).$$

Variable aléatoire :

1°/Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé .

On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X : E \mapsto \mathbb{R}$

Soit(E , P(E) , p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire .

On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X , l'application

PX : X(E) $\rightarrow$ [0,1]

$x_i \mapsto p(X = x_i)$

2°/ Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé . Si X est une variable aléatoire sur E telle que

$X(E) = \{x_1 , x_2,\dots x_n\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$.

3°/Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E telle que $X(E) = \{x_1 , x_2,\dots x_n\}$.

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

4°/Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé et X , Y deux variables aléatoires sur E . alors pour tout réel α ,

- $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
- $E(X+Y)) = E(X) + E(Y)$.

5°/Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E .

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(x^2) - (E(x))^2$

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

6°/Soit (E , P(E) , p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E .

On appelle fonction de répartition de X ,l'application définie de $\mathbb{R}$ dans [0,1] par F : x $\mapsto$ p(X $\leq$ k)

Loi binomiale :

1°/*Soit une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques , indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec .

Soit p la probabilité de l'évènement succès.

On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves .

Alors la loi de probabilité de X est donnée par

$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} , k \in \{0,1,....,n\}$.

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n,p) .

2°/Soit x une variable aléatoire suivant à une loi binomiale B(n,p) .

On a E(X) = np , V(X) = np (1 – p) et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Loi Uniforme :

Soit un intervalle [a,b] (a < b) . la fonction f définie sur [a,b] par

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur [a,b] .

On appelle loi uniforme P sur [a,b] l'application qui à tout intervalle [c,d] inclus dans [a,b] associe le réel $P([c,d]) = \int_c^d f(x)dx$.

Pour tout réel c de [a,b] , $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$.

Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de [c,d] dans [a,b] , alors $P(\overline{[c,d]}) = 1 - P([c,d])$.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle [a,b] suit la loi de probabilité uniforme P si $P(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme P sur l'intervalle [a,b] .

On appelle fonction de répartition de X , l'application F : $\mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P(a \le X \le x) & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Loi exponentielle :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[\, 0 , +\infty [$ par f(t) = $\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle .

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , l'application P qui

1°/ à tout intervalle [c,d] inclus dans $[0, +\infty[$ associe le réel P([c,d]) = $\int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$.

2°/ à tout intervalle $[\, c , +\infty [$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c,+\infty[) = e^{-\lambda c}$.

Pour tout réel c > 0 , P({c}) = $\int_c^c f(x)dx = 0$.

pour tout réel c > 0 , P([0,c]) = $\int_0^c f(x)dx = 1 - e^{-\lambda c}$.

$P([c, +\infty[) = 1 - P([0, c])$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, Si P (c $\leq$ X $\leq$ d) = $\int_{c}^{d} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et P(X $\geq$ c) = $e^{-\lambda c}$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité

exponentielle P de paramètre λ .

On appelle fonction de réparation de X ,

L'application F : $\mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(0 \leq X \leq x) & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

EXERCICES

Exercice 1 :

Une urne contient 5 boules rouges numérotées 1, 1, 1,0, 0 et 4 boules vertes numérotées : 1, 1, 1, 0.

L'épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

1°/ Calculer la probabilité des événements :

A : « Obtenir 3 boules de la même couleur ».

B : « Obtenir 3 boules portant le même numéro ».

2°/ A et B sont-ils indépendants ?

3°/ Calculer la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ou trois boules portant le même numéro.

4°/ Calculer la probabilité d'obtenir au plus une boule verte.

Exercice 2 :

on considère un dé tétraédrique (les quatre faces sont des triangles équilatéraux)

sur les quatre faces sont respectivement marqués les nombres 1, 3, 5 et 10. Après chaque lancer du dé une face est cachée et 3 faces sont visibles, on admet que chaque face à la même probabilité d'être cachée.

1°/ on lance le dé, quelle est la probabilité pour que :

a) sur la face caché soit inscrit un nombre impair

b) la somme des nombres inscrits sur les trois faces visibles soit un nombre pair.

c) la somme des nombres inscrits sur les trois faces visibles soit strictement supérieur à 14.

2°/ on lance le dé 4 fois de suite.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre impair inscrit sur la face cachée.

Exercice 3 :

Dans une classe, 60% des élèves reconnaissent aimer les sciences économiques; 40% aimer les mathématiques; 15% aimer les sciences économiques et les mathématiques.

On interroge au hasard un élève de cette classe.

Quelle est la probabilité pour que cet élève :

a) aime les sciences économiques mais pas les mathématiques.

b) aime les mathématiques mais pas les sciences économiques.

c) n'aime ni les mathématiques ni les sciences économiques.

Exercice 4 :

Dans un lycée; l'occupation de deux salles de permanence est une expérience aléatoire.

Notons S_1 l'événement : « la première salle est occupée ».

et S_2 l'événement : « la deuxième salle est occupée ».

on sait que $P(S_1) = P(S_2)$; $P(S_1 \cup S_2) = 0,9$ et $P(S_1 \cap S_2) = 0,5$

1°/ a) Calculer $P(S_1)$ et $P(S_2)$

b) Les événements S_1 et S_2 sont-ils indépendants?

2°/ Exprimer chacun des événements suivants à l'aide de S_1 et S_2 puis calculer sa probabilité .

a) la 1^{ere} salle est libre

b) les 2 salles sont libres.

c) l'une des salles au moins est libre

d) une seule salle est libre.

e) la seconde salle est libre sachant que la 1ere est occupée.

Exercice 5 :

Une urne contenant cinq boules dont trois vertes numérotées : 1, 2 et 3 et deux rouges numérotées 1 et 2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

1°/ Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur?

2°/ Sachant que la somme des numéros inscrits sur les deux boules est égale à trois; quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

Exercice 6 :

Dans une classe de 35 élèves où tous étudient l'anglais ou l'allemand, 20 élèves étudient l'anglais et 25 l'allemand.

1°/ combien d'élèves étudient l'anglais et l'allemand.

2°/ On choisit un élève au hasard. Calculer :

a) la probabilité qu'il étudie l'anglais.

b) la probabilité qu'il étudie l'anglais et l'allemand.

c) la probabilité qu'il étudie l'allemand sachant qu'il étudie déjà l'anglais.

d) la probabilité qu'il étudie l'anglais sachant qu'il étudie déjà l'allemand.

Exercice 7 :

On dispose de trois machines pour contrôler les pièces fabriquées par une usine. Chaque machine accepte une partie des pièces et refuse les autres.

Si une pièce est refusé par une machine, elle est définitivement éliminée et n'est plus contrôlée par les autres machines.

Pour être acceptée, une pièce doit être contrôlée dans l'ordre par la première machine, la deuxième, la troisième.

La première machine accepte 70% des pièces ; la deuxième 80% de celles qu'elle reçoit, la troisième 95%. Calculer, pour une pièce prise au hasard, les probabilités suivantes :

1°/ La pièce sera acceptée par la deuxième machine.

2°/ La pièce sera refusée par la deuxième machine.

3°/ La pièce sera acceptée par la troisième machine.

4°/ La pièce sera refusée par la troisième machine.

Exercice 8 :

Un établissement de 930 élèves regroupe deux sections : une scientifique et une littéraire.

- 30% des élèves sont en section scientifique.
- 40% des élèves sont des garçons.
- 25% des élèves garçons sont en section scientifique.

1°/ a) Trouver le nombre des garçons en section scientifique.

b) Trouver le nombre des filles en section littéraire.

2°/ On choisit au hasard un élève de l'établissement.

Quelles sont les probabilités des événements A, B et C suivants :

A : C'est un garçon de la section scientifique.

B : Sachant que c'est un garçon; c'est un élève de la section scientifique.

C : Sachant que c'est un élève de la section scientifique; c'est un garçon.

Exercice 9 :

Dans une village de vacance; il y a deux fois plus d'adultes que d'enfants. Si on choisit une personne au hasard, il y a une probabilité de 1/5 pour que ce soit un adulte qui joue au ping-pong et une probabilité de 2/7 pour que ce soit un enfant qui joue au ping-pong.

1°/ On choisit un joueur de ping-pong au hasard; quelle est la probabilité pour qu'il soit un adulte?

2°/ On choisit un joueur de ping-pong au hasard, quelle est la probabilité pour que ce soit un enfant.

3°/ On choisit un adulte au hasard, quelle est la probabilité pour que ce soit un joueur de ping-pong?

4°/ On choisit un enfant au hasard, quelle est la probabilité pour que ce soit un joueur de ping-pong?

Exercice 10 :

Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si nous obtenons 1 nous tirons une boule dans l'urne A; si nous obtenons 2 ou 3 nous tirons une boule dans l'urne B; si nous obtenons 4, 5 ou 6 nous tirons une boule dans l'urne C.

* l'urne A contient quatre boules blanches et une boule noire.

* L'urne B contient quatre blanches et quatre noires.

* L'urne C contient trois blanches et sept noires.

1°/ a) Calculer la probabilité de tirer une boule noire sachant qu'elle provient de l'urne A.

b) En déduire la probabilité de l'événement :

H : « la boule est noire et provient de l'urne A ».

c) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

2°/ Nous savons que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne *A*? de l'urne *B*? de l'urne *C*?

Exercice 11 :

Soit une urne U_1 contenant 7 boules rouges et 3 boules blanches et une urne U_2 contenant 2 boules rouges et 8 blanches .

On effectue une suite de tirages (en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne) de la manière suivante :

- Si au $(n -1)^{ème}$ tirage on a turé une boule rouge alors le $n^{ème}$ tirage s'effectue dans U_1 , sinon il s'effectue dans U_2 .

1°/On appelle P_n la probabilité de tirer une boule rouge au $n^{ème}$ coup .

Démontrer la relation : $P_n = \frac{1}{2} P_{n-1} + \frac{1}{5}$.

2°/On pose $Q_n = P_n - \frac{2}{5}$. Montrer que (Q_n) est une suite géométrique . Sachant que le premier tirage s'effectue dans U_1 , calculer Q_n puis en déduire P_n .

Exercice 12 :

Une urne contient 12 boules dont *n* sont noirs et les autres blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1°/ On suppose $n = 5$ et on tire, sans remise et successivement deux boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « La $1^{ère}$ boule tirée est noire et la seconde est blanche »

B : « Les deux boules tirées sont blanches »

b) On répète l'épreuve 6 fois en remettant, à l'issue de chaque épreuve, les deux boules tirées dans l'urne.

On considère ensuite la variable aléatoire réelle X prenant pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A.

Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique E(X).

2°/ Dans cette question, son suppose $n \geq 2$.

a) Exprimer en fonction de n, la probabilité p_n de A.

b) Déterminer n pour que p_n soit maximale.

Exercice 13 :

On dispose de deux urnes contenant chacune trois jetons numérotés de 0 à 2.

Dans la première les jetons sont rouges, dans la seconde les jetons sont bleus. On tire au hasard un jeton dans la première urne noté a et un jeton dans la deuxième urne noté b.

A ce couple (a,b), on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

1°/ Quelle est la probabilité pour que z vérifie :

« $z^2 - (3+2i)z + 2 + 4i = 0$ ».

2°/ Quelle est la probabilité pour que :

a) z soit réel.

b) z soit un nombre imaginaire non nul.

3°/ On considère la variable aléatoire X qui, à chaque épreuve constituée du tirage d'un jeton rouge et d'un jeton bleu, associe le module de z.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

4°/ Soit M l'image de z dans le plan complexe.

Quelle est la probabilité pour que M soit situé sur la droite d'équation

Exercice 14 :

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois billes numérotées : 1, 2 et 3 en direction de trois trous notés : a, b, c, chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir jusqu'à trois billes. On suppose que les événements élémentaires liés à cette expérience sont équiprobables.

1°/ Quelle est la probabilité des événements suivants :

A : « Chaque trou reçoit une bille »

B : « Le trou « a » reçoit deux billes exactement »

C : « Chaque trou reçoit au maximum deux billes »

2°/ Sachant que le trou « a » reçoit les billes 1 et 2, quelle est la probabilité pour que le trou b soit vide ?

3°/ On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de trous vides. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique.

Exercice 15:

On dispose de deux dés en apparence identiques dont l'un est parfait et l'auter truqué , les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6 . Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est eéagle à $\frac{1}{3}$.

1°/

a) On lance le dé parfait trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) On lance le dé truqué trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 .

2°/ On choisit au hasard l'un des deux dés ; les choix étant équiprobables, et on le lance trois fois de suite. On considère les évènements suivants :

A : << Obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 >>

B : << Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 >>

C : << Choisir le dé parfait et obtenir exactement 2 fois la face portant le chiffre 4 >>

a) Calculer la probabilité de B
b) Calculer la probabilité de C
c) En déduire la probabilité de A .

Exercice 16 :

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher . Deux boules sont blanches et portant respectivement les nombres 1 et 2 , les deux autres boules sont noires et portant respectivement les nombres 1 et 2 .

Une épreuve consiste à tirer successivement deux boules de la manière suivante : on tire une première boule :

- Si elle est blanche , on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule .
- Si elle est noire , on ne la remet pas dans l'urne et on tire une deuxième boule .

1°/ Soit X la variable aléatoire qui , à chaque épreuve , associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche .

a) Donner la loi de probabilité de X .
b) Calculer son espérance mathématique .

2°/ Soit Y la variable aléatoire qui , à chaque épreuve , associe le produit des nombres marqués sur deux boules obtenues . Donner la loi de probabilité de Y .

Exercice 17 :

Une urne U_1 contient 3 boules noires et n boules blanches.

Une urne U_2 contient n boules noirs et 3 boules blanches, où n est un entier naturel non nul.

On tire au hasard une boule de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 et on désigne par X l'aléa numérique qui est égal au nombre total des boules noires qui restent dans les deux urnes U_1 et U_2 .

1°/ Calculer la probabilité de chacun des deux événements A et B suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « Parmi les deux boules tirées, une au moins est blanche »

2°/a) Déterminer la loi de probabilité de l'aléa numérique X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

c) Pour quelles valeurs de l'entier n, l'espérance mathématique de X est-elle supérieure à 5,6 ?

Exercice 18 :

Un bus passe toute les 20 minutes a un arrêt donné .

La variable aléatoire X mesure le temps d'attente en minutes d'une personne qui veut monter dans ce bus à cet arrêt .

On suppose que X est une loi uniforme sur l'intervalle $[0,20]$

1°/ Calculer $p(X < 2)$; $p(2 < X < 12)$; $p(X > 15)$

2°/ Calculer $p(x < 10 \mid x > 5)$

Exercice 19 :

On considère une urne contenant des jetons numérotés de 1 à 200.

On tire un jeton au hasard

Soit X la variable aléatoire égale à la valeur du nombre écrit sur le jeton tiré .

1°/ Déterminer la loi de probabilité de X

2°/ Calculer : $p(x < 50)$; $p(x > 150)$; $p(10 < x < 100)$

3°/ Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 20 :

Pour une variable aléatoire X exprimée en minutes , qui représente une durée de vie et suit une loi exponentielle , on a : $p[X > 3] = 0,2$

1°/ Calculer la durée de vie moyenne

2°/ Calculer $p [X < 5]$

Exercice 21 :

Une usine fabrique 9000 unités d'un certain produit en un temps t .

Pour cette même période , la demande , en milliers d'unités , concernant ce produit peut être considéré comme une variable aléatoire continue X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$

1°/ Quelle est la probabilité que la demande dépasse la production ?

2°/ Quelle devrait être la production pour que cette probabilité soit inférieure à 4% .

Exercice 22 :

La durée de vie , exprimée en heurs , d'un certain type d'ampoules électriques est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,002

1°/ Exprimer en fonction de t probabilité $p[x \leq t]$

2°/ Calculer la probabilité pour qu'elle avant une défaillance avant 500 heures

3°/ Calculer $p [X > 800]$

4°/ Déterminer l'instant t tel que $p [X \leq t] = \frac{1}{2}$.

Interpréter ce résultat .

Exercice 23 :

Un fabricant de jeux électroniques estime qu'une pièce a une durée de vie moyenne de 700 jours .

On suppose que la variable X qui représente la durée de vie d'une telle pièce suit une loi exponentielle

1°/ Exprimer en fonction de t probabilité $p [x \leq t]$

2°/ Calculer la probabilité de chacun évènements

A " la pièce n'a pas de défaillance durant les quatre premiers mois"

B " la pièce est encore en fonctionnement au bout de 2 ans"

C " sachant que la pièce fonctionne encore de 2 ans , elle fonctionne encore au bout de 5 ans "

3°/ Au bout de quelle durée peut-on s'attendre à ce que 10% des pièces soient en panne .

Exercice 24 :

Une mouche entre dans une salle et on tente de la tuer

On note T la variable aléatoire égale à la durée de vie de la mouche (on suppose que T suit une loi exponentielle)

1°/ la probabilité pour que la mouche soit tuée au cours de 20 premiers minutes et 0,8 calculer la durée de vie moyenne de la mouche

2°/ Quinze mouches entrent dans la salle ,

a) Quelle est la probabilité pour que 10 d'entre elles soient tuées dans le premier quart d'heures ?

b) Quelle est la probabilité pour que plus d'une mouche soit tuées en moins de 5 minutes .

Exercice 25 :

On suppose la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

1°/ Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie

2°/ On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans quelle est la durée qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

3°/ Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse 2ans .

Exercice 26 :

La durée de vie d'un robot , exprimée en années , jusqu'à ce que survienne la première panne et une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.

1°/

a) Exprimer en fonction de t la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t .

b) Déterminer λ , arrondi à 0,1 près pour que la probabilité $p(X > 6) = 0,3$

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,2$

2°/ A quel instant t, à un mois près, la probabilité q'un robot tombe en panne pour la première fois est elle de 0,5 ?

3°/ Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.

4°/ Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années.

Quelle est, à 0,01 près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans.

SOLUTIONS

Solution 1 :

A : {R, R, R} ou {V, V, V}.

1°/• $P(A) = \dfrac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \dfrac{10+4}{84} = \dfrac{1}{6}$

• $P(B) = \dfrac{C_6^3 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{21}{84} = \dfrac{1}{4}$

2°/ On sait que A et B sont indépendants si et seulement si :

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

$A \cap B$: « Avoir trois boules de même couleur et de même numéro » :

$R_1\, R_1\, R_1$ ou $V_1\, V_1\, V_1$.

$\Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{2}{84} = \dfrac{1}{42}$.

on a : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

3°/ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{42} = \dfrac{11}{28}$.

4°/ Soit l'événement :

C : « Obtenir au plus une boule verte »

C : {V, R, R} ou {R, R, R}

d'où $P(C) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_5^2 + C_5^3}{C_9^3} = \dfrac{40+10}{84} = \dfrac{50}{84} = \dfrac{25}{42}$

Solution 2 :

1°/ a) Soit l'événement A : « sur la face cachée est inscrit un nombre impair » ; $P(A) = \dfrac{3}{4}$

b) Soit l 'événement B : « la somme des nombres inscrits sur les trois faces visibles est un nombre pair ».

Soit x, y, z et t les nombres inscrits sur les quatre faces

(t est le nombre inscrit sur la face cachée).

$x+y+z$ est pair $\Leftrightarrow x$ est pair et y et z sont impairs donc t est impair

et par suite $B = A$ d'où $P(B) = \dfrac{3}{4}$

c) soit C : « $x+y+z > 14$ » : « $t = 1$ ou $t = 3$ »

$P(C) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2°/ soit S : « Avoir un nombre impair inscrit sur la face cachée »

on a : $S = A$ $\quad P(S) = \dfrac{3}{4}$

Soit H : « obtenir au moins une fois S »

$\overline{H}$: « obtenir $\overline{S}$ pendant les 4 lancers ».

$P(\overline{H}) = \left[P(\overline{S})\right]^4 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{1}{256}$ donc $P(H) = \dfrac{255}{256}$

(les 4 lancers sont indépendants)

Solution 3 :

Soit E : « Aimer les sciences économiques ».

M : « Aimer les mathématiques ».

$C = E \cap M$

a) A_1 : « Aimer les sciences économiques et non les mathématiques »

$A_1 = E \cap \overline{M}$

$P(A_1) = P(E) - P(E \cap M)$

(on sait que $P(B \cap C) + P(B \cap \overline{C}) = P(B)$)

$$P(A_1)=\frac{60}{100}-\frac{15}{100}=\frac{45}{100}=0,45$$

b) Soit A_2 : « Aimer les mathématiques et non les sciences économiques » ; $A_2=M\cap\overline{E}$

$$P(A_2)=P(M)-P(M\cap E)=\frac{40}{100}-\frac{15}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

c) A_3 : « n'aimer ni les mathématiques ni les sciences économiques »

$A_3=\overline{M}\cap\overline{E}\Rightarrow\overline{A_3}=M\cup E$

$P(\overline{A_3})=P(M\cup E)=P(M)+P(E)-P(M\cap E)$

$$=\frac{60}{100}+\frac{40}{100}-\frac{15}{100}=\frac{85}{100}=0,85 \text{ d'où } P(A_3)=0,15$$

Solution 4 :

1°/ a) On a : $P(S_1\cup S_2)=P(S_1)+P(S_2)-P(S_1\cap S_2)$

or $P(S_1)=p(S_2)=x$ donc $0,9=2x-0,5\Leftrightarrow x=0,7$

Conclusion : $P(S_1)=p(S_2)=0,7$

b) on a : $P(S_1\cap S_2)=0,5$ et $P(S_1)\cdot P(S_2)=0,7^2=0,49$

$P(S_1\cap S_2)\neq P(S_1)\cdot P(S_2)$ donc S_1 et S_2 ne sont pas indépendants.

2°/ a) Soit A : « la 1ere salle est libre ». $A=\overline{S_1}\Rightarrow P(A)=1-P(S_1)=0,3$

b) Soit B : « les deux salles sont libres ».

$B=\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\Rightarrow\overline{B}=S_1\cup S_2\Rightarrow P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(S_1\cup S_2)=0,1$

c) Soit C : « l'une des salles au moins est libre ».

$C=\overline{S_1}\cup\overline{S_2}\Rightarrow\overline{C}=S_1\cap S_2$

$\Rightarrow P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(S_1\cap S_2)=0,5$

d) Soit D : « une seule salle est libre ».

$D=(\overline{S_1}\cap S_2)\cup(\overline{S_2}\cap S_1)$

$(\overline{S}_1 \cap S_2)$ et $(\overline{S}_2 \cap S_1)$ sont incompatibles

donc $P(D) = P(\overline{S}_1 \cap S_2) + P(\overline{S}_2 \cap S_1)$

or $P(\overline{S}_1 \cap S_2) = P(S_2) - P(S_2 \cap S_1)$

car ($P(S_2) = P(S_2 \cap S_1) + P(S_2 \cap \overline{S}_1)$) donc $P(\overline{S}_1 \cap S_2) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$

$P(S_1 \cap \overline{S}_2) = P(S_1) - P(S_2 \cap S_1) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$ d'où $P(D) = 0{,}4$

e) Soit E : « la seconde salle est libre sachant que la 1ère salle est occupée » ; $E = (\overline{S}_2 | S_1)$

$$P(E) = P(\overline{S}_2 | S_1) = \frac{P(\overline{S}_2 \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$$

Solution 5 :

1°/ A : « obtenir deux boules de la même couleur ».

A : « obtenir 2 boules vertes ou 2 boules rouges ».

$$P(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

2°/ Soit B : « la somme des numéros inscrits sur les deux boules tirées est égale à 3 » ; C : « A sachant B ».

$$P(C) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)}$$

* $A \cap B$ « $V_1 V_2$ ou $R_1 R_2$ »

$$P(A \cap B) = \frac{C_1^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

B : « avoir une boule portant le n°1 et une boule portant le n°2 ».

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \quad \text{d'où } P(C) = 0{,}5$$

Solution 6 :

Soit A : l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais

B : l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand

1°/ Soit C : l'ensemble des élèves qui étudient à la fois les deux matières.

$C = A \cap B$; $A \cup B = \Omega$ (Ω : l'ensemble des élèves de la classe)

on a : $cardA = 20$; $cardB = 25$

$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

$35 = 20 + 25 - cardC \Rightarrow cardC = 45 - 35 = 10$

Conclusion : il y a 10 élèves qui étudient à la fois les deux matières.

2°/ a) $P(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$

b) $P(A \cap B) = P(C) = \dfrac{10}{35} = \dfrac{2}{7}$

c) Soit E « $B|A$ » ; $P(E) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

d) Soit F » $A|B$ » ; $P(F) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

Solution 7 :

A_1 « la pièce est acceptée par la $1^{ère}$ machine »

A_2 « la pièce est acceptée par la $2^{ème}$ machine »

A_3 « la pièce est acceptée par la $3^{ème}$ machine »

on a : $A_3 \subset A_2 \subset A_1$

on a : $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2 | A_1) = 0{,}8$

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{95}{100} = 0{,}95$$

on a : $P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A}_1)$

$$= P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_1)$$

$$= (0{,}8 \times 0{,}7) + 0 = 0{,}56$$

2°/ Soit B « la pièce est refusée par la deuxième machine ».

$B = A_1 \cap \overline{A}_2$

$P(B) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$

$P(B) = 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}14$

3°/ $P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + p(A_3 \cap \overline{A}_2)$

$$= P(A_3|A_2) \cdot P(A_2) + P(A_3|\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_2)$$

$$= P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2) + 0 = 0{,}532$$

4°/ Soit C « la pièce est refusée par la troisième machine »

$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)$ or $A_2 \subset A_1$ donc $A_2 \cap A_1 = A_2$

$C = A_2 \cap \overline{A}_3$

$P(C) = p(A_2 \cap \overline{A}_3) = p(A_2) - P(A_2 \cap A_3)$

$$= 0{,}56 - 0{,}532 = 0{,}028$$

Solution 8 :

soit G « être un garçon » ; F « être une fille » $(F = \overline{G})$

S « être scientifique » ; L « être littéraire » $(S = \overline{L})$

1°/ a) on demande de chercher le cardinal de l'ensemble $G \cap S$

$$cardS = \frac{930 \times 30}{100} = 279 \quad ; \quad cardG = \frac{930 \times 40}{100} = 372$$

$$card(S \cap G) = 372 \times \frac{25}{100} = \frac{372}{4} = 93$$

il y a 93 garçons scientifiques

b) on demande de chercher le cardinal de $F \cap L$

Soit $H = F \cap L$; $\overline{H} = \overline{F} \cup \overline{L} = G \cup S$

$$\begin{aligned} cardH &= 930 - card\overline{H} \\ &= 930 - (cardG + cardS - card(G \cap S)) \\ &= 930 - (372 + 279 - 93) = 372 \end{aligned}$$

2°/* A « C'est un garçon de la section scientifique »

$$A = G \cap S \quad ; \quad P(A) = P(G \cap S) = \frac{93}{930} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$* \ B \text{ « } S|G \text{ »}; P(B) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{card(G \cap S)}{cardG} = \frac{93}{372} = 0{,}25$$

$$*C \text{ « } G|S \text{ »}; P(C) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{card(G \cap S)}{cardS} = \frac{1}{3}$$

Solution 9 :

Soit A « être adulte »

E « être enfant »

J « joueur au ping-pong »

on a : $P(A \cap J) = \dfrac{1}{5}$; $P(E \cap J) = \dfrac{2}{7}$

1°/ on demande de calculer la probabilité de l'événement : « A sachant J » soit A_1 : « $A|J$ »

$$P(A_1) = P(A|J) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)} \quad \text{or} \quad p(A \cap J) = \frac{1}{5}$$

$$P(J) = P(J \cap A) + P(J \cap \overline{A}) = P(J \cap A) + P(J \cap E) = \frac{17}{35}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{5} \times \frac{35}{17} = \frac{7}{17}$$

2°/ On demande de calculer la probabilité de l'événement :

« E sachant J » ; A_2 : « $E|J$ »

$$P(A_2)=\frac{P(E\cap J)}{P(J)}=\frac{2}{7}\times\frac{35}{17}=\frac{10}{17}$$

3°/ on demande de calculer la probabilité de l'événement :

« J sachant A » ; B_1 : « $J|A$ »

$$P(B_1)=\frac{p(J\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{10}$$

4°/ soit B_2 : « $J|E$ » ; $P(B_2)=\dfrac{p(J\cap E)}{P(E)}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{1}=\dfrac{6}{7}$

Solution 10 :

1°/ a) Soit N : « obtenir une boule noire »

A : « tirer une boule de l'urne A »

soit E : « $N|A$ »

$$P(E)=P(N|A)=\frac{1}{5}$$

b) H : « $N\cap A$ »

$$P(H)=P(N\cap A)=P(N|A)\cdot P(A) \quad \text{or} \quad P(N|A)=\frac{1}{5}$$

et $P(A)=P[\text{obtenir le numé ro 1}]=\dfrac{1}{6}$ donc $P(H)=\dfrac{1}{30}$

c) $P(N)=P(N\cap A)+p(N\cap B)+p(N\cap C)$

(principe de la probabilité totale)

$$P(N)=P(N|A)\cdot P(A)+P(N|B)\cdot P(B)+P(N|C)\cdot P(C)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{8}\times\frac{2}{6}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}+\frac{7}{20}=\frac{11}{20}$$

2°/ * on demande de calculer la probabilité des événements :

« $A|N$ » ; « $B|N$ » et « $C|N$ »

$$P(A|N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{1}{30} \times \frac{20}{11} = \frac{2}{33}$$

* $P(B|N) = \dfrac{P(B \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(N|B) \cdot P(B)}{P(N)}$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times \frac{20}{11} = \frac{10}{33}$$

* $P(C|N) = \dfrac{P(C \cap N)}{P(N)} = \dfrac{7}{20} \times \dfrac{20}{11} = \dfrac{7}{11}$

Solution 11 :

1°/ Soient les évènements :

R_n : << obtenir une boule au $n^{ème}$ coup >>

A_1 : << la boule tirée au $n^{éme}$ tirage provient de l'urne U_1 >>

A_2 : << la boule tirée au $n^{ème}$ tirage provient de l'urne U_2 >>

On a : $P_n = P(R_n) = P(R_n \cap A_1) + P(R_n \cap A_2)$ car $A_2 = \overline{A_1}$

$$= P(A_1) \,.\, P(R_n|A_1) + P(A_2) \,.\, P(R_n|A_2)$$

Or l'évènement A_1 se réalise si et seulement si au $(n-1)^{ème}$ tirage on retire une boule rouge . Donc $P(A_1) = P_{n-1}$, $P(\overline{A_1}) = 1 - P_{n-1}$

$P(R_n|A_1) = \dfrac{C_7^1}{C_{10}^1} = \dfrac{7}{10}$; $P(R_n|A_2) = \dfrac{C_2^1}{C_{10}^1} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

D'où $P_n = \dfrac{7}{10} P_{n-1} + \dfrac{1}{5}(1 - P_{n-1}) \Leftrightarrow P_n = \dfrac{1}{2} P_{n-1} + \dfrac{1}{5}$

2°/

- $Q_{n+1} = P_{n+1} - \dfrac{2}{5}$ or $P_{n+1} = \dfrac{1}{2} P_n + \dfrac{1}{5}$

D'où $Q_{n+1} = \dfrac{1}{2} P_n - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2}(P_n - \dfrac{2}{5}) = \dfrac{1}{2} Q_n$

Ce qui donne la suite (Q_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

• Le premier tirage s'effectue dans U_1 donc $P_1 =$

$$\frac{7}{10} \Rightarrow Q_1 = \frac{3}{10} \Rightarrow Q_n = Q_1(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{n-1} \text{ d'où } P_n = \frac{3}{10}(\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{2}{5}$$

Solution 12 :

1°/a) Soit les événements : N_1 : «la 1ère boule tirée est noire»

B_1 : «la 1ère boule tirée est blanche»

B_2 : «la 2ème boule tirée est blanche»

• On a : $P(A) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1).P(B_2 | N_1)$

or $P(N_1) = \frac{5}{12}$ et $P(B_2 | N_1) = \frac{7}{11}$ d'ou $P(A) = \frac{35}{132}$

• On a : $P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2 | B_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$.

b) Soit $S = A \Rightarrow P(S) = P(A) = \frac{35}{132}$.

Les épreuves sont indépendantes car à l'issue de chaque épreuve, on remet les deux boules tirées donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 6$ et $p = \frac{35}{132}$.

Les valeurs prises par X sont : 0,1,2,3,4,5 et 6.

$$P[X = k] = C_6^k (\frac{35}{132})^k (\frac{97}{132})^{6-k} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

$$E(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{35}{132} = \frac{35}{22}.$$

2°/a) $P_n = P(A) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1).P(B_2 | N_1) = \frac{n}{12} \cdot \frac{12-n}{11} = \frac{n(12-n)}{132}$.

b) Soit la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{x(12-x)}{132} = \frac{-x^2+12x}{132} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x+6}{66}$$

$f'(6) = 0$ et $f'(x)$ change de signe donc f admet un maximum pour $x=6$ d'où P_n est maximale pour $n = 6$.

Solution 13 :

1°/ $z^2 - (3+2i)z + 2 + 4i = 0$

$\Delta = (3+2i)^2 - 4(2+4i) = -3-4i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \quad \text{d'où} \quad x = \pm 1 \ \text{ et } \ y = \pm 2 \\ 2xy = -4 < 0 \end{cases}$$

d'où $\Delta = (1-2i)^2$

$$z' = \frac{3+2i+(1-2i)}{2} = 2 \Rightarrow a = 2 \text{ et } b = 0$$

$$z'' = \frac{3+2i-(1-2i)}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 2$$

d'où $A = \{ (2,0) , (1,2) \}$ et $p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

2°/• B : « z est un réel »

z est un réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow b = 0$

d'où : $B = \{(0,0) ; (1,0) ; (2,0) \}$

et par suite $p(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

• C : « z est un nombre imaginaire $\neq$ 0 »

$$\Leftrightarrow \; z \neq 0 \text{ et } \mathrm{Ré}(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{et} \\ b \neq 0 \end{cases}$$

d'où C = { (0,1) ; (0,2) } et $p(C) = \dfrac{2}{9}$

3°/a)

b \ a	0	1	2
0	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
1	$X = 1$	$X = \sqrt{2}$	$X = \sqrt{5}$
2	$X = 2$	$X = \sqrt{5}$	$X = 2\sqrt{2}$

$X = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

d'où $X(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 2\sqrt{2}\}$

b)

x_i	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

On a : $\sum p_i = 1$.

4°/M(z) appartient à la droite Δ : $y = x \Leftrightarrow a = b$.

Soit E : « M $\in \Delta$: $y = x$ »

$E = \{ (0, 0) ; (1, 1) ; (2, 2) \} \Rightarrow p(E) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$

Solution 14 :

1°/L'univers Ω est l'ensemble des applications de

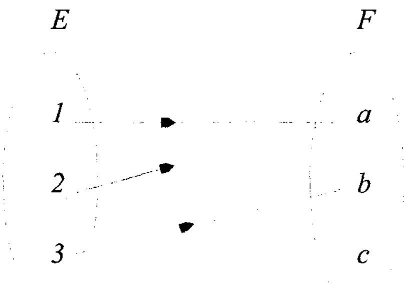
$E = \{1,2,3\} \longrightarrow F = \{a,b,c\}$ et par suite $\mathrm{Card}\,\Omega = 3^3 = 27$.

$$\Rightarrow \quad p(A) = \frac{\mathrm{Card}\,A}{\mathrm{Card}\,\Omega}.$$

Or A est l'ensemble des bijections de $E \to F$ donc $\text{Card}A = 3! = 6$

d'où $\quad p(A) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9} \quad \Rightarrow \qquad p(B) = \dfrac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega}$.

Exemple :



Il y a C_3^2 choix de 2 billes de l'ensemble E. Pour chaque choix il y a 2 façons pour compléter le diagramme, donc $\text{Card } B = C_3^2 \times 2 = 6$.

D'où $\quad p(B) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow p(C) = \dfrac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega}$

$\overline{C}$: les trois billes se trouvent dans un même trou; $\text{Card}\overline{C} = 3$.

$\Rightarrow \quad p(\overline{C}) = \dfrac{3}{27} = \dfrac{1}{9}$ d'où $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$.

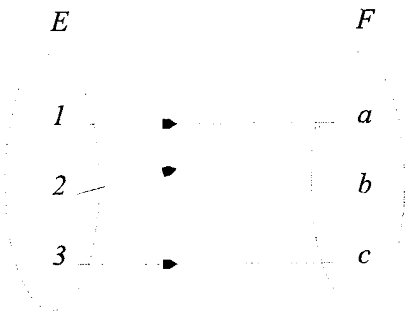
2°/ Soit l'événement D : "le trou «a» reçoit les billes 1 et 2"

E : "le trou «b» est vide"

La probabilité demandée est $p(E/D)$: $\quad p(E/D) = \dfrac{p(E \cap D)}{p(D)}$.

Or $E \cap D$: "le trou «a» reçoit les billes 1 et 2 et le trou b est vide"

= "le trou «a» reçoit les billes 1 et 2 et le trou c reçoit la bille 3".



Donc $\text{Card}(E \cap D) = 1$ d'où $p(E \cap D) = \frac{1}{27}$ et $p(D) = \frac{2}{27}$.

donc $p(E/D) = \frac{1}{2}$.

3°/• $X(\Omega) = \{ 0 , 1 , 2 \}$.

$p[X = 0] = p(A) = \frac{6}{27}$.

$p[X = 2] = ?$.

$[X = 2]$: "2 trous vides" = "les trois billes se trouvent dans le même trou".

$p[X = 2] = \frac{3}{27}$.

Or on sait que $p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] = p(\Omega) = 1$

d'où $p[X = 1] = 1 - \frac{6}{27} - \frac{3}{27} = \frac{18}{27}$.

x_i	0	1	2
$p[X = x_i]$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{3}{27}$

- Espérance mathématique :

$$E(X) = \frac{18}{27} + \frac{6}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

Solution 15 :

1°/

a) Soit S : << La face portant le chiffre 4 apparaît >> , $P(S) = \frac{1}{6}$.

X suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et $P = \frac{1}{6}$ d'où

$P[X = k] = C_3^k (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{3-k}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$\sum_i P_i = 1$

b) Soit S : << Avoir la face n°4 >> et Y : la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le nombre de fois S .

Y suit une loi binomiale de paramètre n = 3 et $P = P(S) = \frac{1}{3}$ d'où la probailité demandée est $P[Y = 2] = C_3^2 (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$.

2°/

a) Soit l'évènement T : << Choisir le dé truqué >>

$P(B) = P(T \cap A) = P(T) . P(A | T)$ or $P(T) = \frac{1}{2}$ et d'après 1°/ a) :

$P(A | T) = P[Y = 2] = \frac{2}{9}$ d'où $P(B) = \frac{1}{2} . \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

b) $P(C) = P(\overline{T} \cap A) = P(\overline{T}).P(A|\overline{T})$ or $P(\overline{T}) = \frac{1}{2}$ et d'après 1°/ a)

$P(A|\overline{T}) = P[X = 2] = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$ d'où $P'(C) = \frac{5}{144}$

c) On a : $A = B \cup C$ et $B \cap C = \varnothing$ donc $P(A) = P(B) + P(C) = \frac{7}{48}$.

Solution 16 :

1°/ $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}]$

- $P[X = 0] = P(NN) = \frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P[X = 1] = P(NB) + P(BN) = \frac{2}{4}.\frac{2}{3} + \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{7}{12}$
- $P[X = 2] = P(BB) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

x_i	0	1	2
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$\sum_i P_i = 1$

b) $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{7}{12} + \frac{2}{4} = \frac{13}{12}$

2°/ $Y(\Omega) = \{1, 2, 4\}$

$P[Y = 1] = P(B_1B_1) + P(N_1B_1) + P(B_1N_1) = (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}.\frac{1}{3} + (\frac{1}{4})^2 = \frac{5}{24}$

$P[Y = 2] = P(N_1N_2) + P(N_2N_1) + P(B_1B_2) + P(B_2B_1) + P(N_1B_2) + P$

$(B_2N_1) + P(N_2B_1) + P(B_1N_2) = (\frac{1}{4}.\frac{1}{3}).4.(\frac{1}{4})^2 = \frac{14}{24}$

$$P[\,Y=4\,] = P\,(\,B_2B_2) + P\,(N_2B_2) + P(B_2N_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}$$

x_i	0	1	2
P_i	$\frac{5}{24}$	$\frac{14}{24}$	$\frac{5}{24}$

$\sum_i P_i = 1$

Solution 17 :

$U_1 : \begin{cases} 3N \\ nB \end{cases}$ $\qquad U_2 : \begin{cases} nN \\ 3B \end{cases}$ $\qquad (\,n \neq 0\,)$

1°/• A : « NN ou BB »

$$p(A) = \frac{3}{3+n}\cdot\frac{n}{3+n} + \frac{n}{3+n}\cdot\frac{3}{3+n} = \frac{6n}{(n+3)^2}$$

- B : « Au moins une boule blanche »

  $\overline{B}$: « Aucune boule blanche » = « NN ».

d'où $p(\overline{B}) = \dfrac{3n}{(n+3)^2} \Rightarrow p(B) = 1 - \dfrac{3n}{(n+3)^2} \Rightarrow p(B) = \dfrac{n^2+3n+9}{(n+3)^2}$.

2°/a) $BB \Rightarrow X = n+3$

$BN \Rightarrow X = n+2$

$NB \Rightarrow X = n+2$

$NN \Rightarrow X = n+1$

$X(\Omega)=\{n+1,\, n+2,\, n+3\}$.

• $p[X = n+1] = p(NN) = \dfrac{3n}{(n+3)^2}$

• $p[X = n+2] = p(BN \text{ ou } NB) = \dfrac{n}{n+3}\cdot\dfrac{n}{n+3} + \dfrac{3}{(n+3)}\cdot\dfrac{3}{(n+3)} = \dfrac{n^2+9}{(n+3)^2}$

- $p[X = n+3] = p(BB) = \dfrac{n}{n+3} \cdot \dfrac{3}{n+3} = \dfrac{3n}{(n+3)^2}$

x_i	$n+1$	$n+2$	$n+3$
p_i	$\dfrac{3n}{(n+3)^2}$	$\dfrac{n^2+9}{(n+3)^2}$	$\dfrac{3n}{(n+3)^2}$

On a : $\sum p_i = 1$.

b) $E(X) = \sum x_i p_i = \dfrac{3n(n+1)+(n+2)(n^2+9)+3n(n+3)}{(n+3)^2}$

$$= \frac{3n(2n+4)+(n+2)(n^2+9)}{(n+3)^2} = \frac{(n+2)[n^2+6n+9]}{(n+3)^2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)^2}{(n+3)^2} = n+2$$

c) $E(X) \geq 5{,}6 \Leftrightarrow n+2 \geq 5{,}6 \Leftrightarrow n \geq 3{,}6$ d'où $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$

Solution 18 :

1°/ On a par définition $\begin{cases} p(0 \leq X \leq 20) = 1 \\ p(a \leq X \leq b) = \dfrac{b-a}{20} \end{cases}$

d'où $p(X < 2) = p(0 < X < 2) = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$

$p(2 < X < 12) = \dfrac{12-2}{20} = 0{,}5$

$p(X > 15) = 1 - p(X \leq 15) = 1 - \dfrac{15}{20} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

2°/ $p(X < 10 \mid X > 5) = \dfrac{p(5 < X < 10)}{p(X > 5)} = \dfrac{\frac{10-5}{20}}{1 - \frac{5}{20}} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

Solution 19 :

1°/ $X_\Omega = \{1,2,3\ldots,200\}$

$\forall a \in X_\Omega$ on a : $p(X = a) = \dfrac{1}{200}$

X suit une loi uniforme

2°/ $p(X < 50) = \displaystyle\sum_{k=1}^{49} p(X = k) = \frac{49}{200} = 0,245$

$p(X > 150) = 1 - p(X \leq 150)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{150} p(X = k) = 1 - \frac{150}{200} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$p(10 < X < 100) = \displaystyle\sum_{k=11}^{99} p(X = k) = \frac{(99 - 11 + 1)}{200} = \frac{89}{200} = 0,445$

3°/ $E(X) = \sum xipi = \dfrac{1}{200}\displaystyle\sum_{k=1}^{200} k = \frac{1}{200}\,\frac{200 \times 201}{2} = \frac{201}{2}$.

Solution 20 :

1°/ $p[X > 3] = 0,2 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\lambda t} = 0,2 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$e^{-3\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow -3\lambda = \ln(0,2) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0,2)}{3} \simeq 0,536$

La durée de vie moyenne est $m = E(x) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{-3}{\ln(0,2)} \simeq 1,86\,\text{min}$

2°/ $p[X < 5] = 1 - e^{-\lambda t}$ où $\begin{cases} \lambda \simeq 0,536 \\ t = 5 \end{cases}$

$$= 1 - e^{-5 \times 0,536}$$

$$\simeq 0,931$$

Solution 21 :

1°/ p (x > 9) ? car X est exprimé en milliers d'unités

$$p(x > 9) = e^{-\lambda t} \text{ où } \lambda = \frac{1}{3} \text{ et } t = 9$$

$$= e^{-3} \simeq 0,05$$

2°/ soit P_0 : la production cherché en milliers d'unités
on a : $p(x > P_0) < 0,04 \Leftrightarrow$

$$e^{\frac{-P_0}{3}} < 0,04 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-P_0}{3} < \ln(0,04) \Leftrightarrow \qquad P_0 > -3\ln(0,04) \Leftrightarrow$$

$$P_0 > 9,6566$$

Donc $P_0 \geq 9657$ unités

Solution 22 :

1°/ $p[X \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$

or $\lambda = 0,002$

d'où $p[X \leq t] = 1 - e^{-0,002t}$

2°/ $p[X \leq 500] = 1 - e^{-1} \simeq 0,632$

3°/ $p[X > 800] = 1 - p[X \leq 800] = e^{-1,6} \simeq 0,202$

4°/ $p[X \leq t] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow \lambda t = \ln 2$

D'où $t = \frac{\ln 2}{0,002} \simeq 347$

Cela signifie que la moitié des ampoules n'a pas de défaillance avant 347 heures de fonctionnement .

Solution 23 :

1°/ $p[X \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$ où $\lambda = \dfrac{1}{E(X)} = \dfrac{1}{700} = 0,0014$

d'où : $p[X \leq t] = 1 - e^{-0,0014t}$

2°/ $p(A) = p[X \geq 120] = e^{-\lambda t}$
où $\lambda = 0,0014$

$t = 120$.

$p(A) = e^{-0,0014 \times 120} \simeq 0,845$

$p(B) = p[X \geq 730]$

$= e^{-\lambda t}$ $\quad$ *où* $\lambda = 0,0014$
$t = 730$

$\simeq 0,36$

$$p(C) = \frac{p[X \geq 5\,\text{ans et}\, X \geq 2ans]}{p(X \geq 2\text{ans})} = \frac{p(X \geq 5\,\text{ans})}{p[X \geq 2\text{ans}]}$$

$$= \frac{e^{-\lambda \times 5 \times 360}}{e^{-\lambda \times 2 \times 360}} = e^{-3\lambda \times 360} \simeq 0,216$$

3°/ $p(X \leq t_0) = 0,1$ où t_0 ?

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t_0} = 0,1 \Leftrightarrow e^{-\lambda t_0} = 0,9 \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{-\ln(0,9)}{\lambda}$

$t_0 \simeq 75$ jours

Solution 24 :

1°/ $p[T < 20] = 1 - e^{-\lambda t}$ où $t = 20 = 1 - e^{-20\lambda}$

Or $p(T < 20) = 0,8 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{Ln(0,2)}{20} \Leftrightarrow \lambda \simeq 0,08$

D'où la durée de vie moyenne de la mouche est : $m = E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

$= 12,5$ minutes

2°/ soit l'événement S " une mouche soit tuée dans le premier quart d'heure

(1 quart d'heure = $\frac{60}{4}$ = 15 minutes)

p(S) = p (T < 15)

$= 1 - e^{-\lambda t}$ où $\begin{cases} \lambda = 0,08 \\ t = 15 \end{cases}$

= 0,699

Soit X la variable binomiale de paramètre n = 15 et p = 0,699

Soit H" 10 mouches soient tuées dans le premier quart d'heures

$p(H) = p(X = 10) = C_{15}^{10}(0,699)^{10} \times (0,301)^5 \simeq 0,207$

b) soit S' : « une mouche soit tuée en moins de 5 minutes)

$p(S') = p(T \leq S) = 1 - e^{-\lambda t}$ où $\lambda = 0,08$ et t = 5

$p(S') \simeq 0,33$

Soit Y : la variable binomiale de paramètre n' = 15 et p' = 0,33 .

Soit l'évènement K"plus d'une mouche en moins de 5 minutes "

$p(k) = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - C_{15}^{0}(0,33)^{0}(0,67)^{15}$

$= 1 - (0,67)^{15} \simeq 0,998$

Solution 25 :

1°/ $p[X > 10] = e^{-\lambda t}$ où t = 10 et $\lambda = 0,1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$

2°/ $p[X > 12 \mid X > 10] =$

$$\frac{p((X>12)\cap(X>10))}{p[X>10]} = \frac{p[X>12]}{p[X>10]} = \frac{e^{-1,2}}{e^{-1}} = e^{-0,2} \simeq 0,82$$

$p[X > 2] = e^{-\lambda t}$ où $\begin{cases} \lambda = 0,1 \\ t = 2 \end{cases} = e^{-0,2} \simeq 0,82$

3°/ On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de pus ne dépend pas de son age .

Solution 26 :

1°/

a) $p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

b) $p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6)$

$= e^{-6\lambda}$

$e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln(0,3)$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-Ln(0,3)}{6} = 0,200662$

$\lambda \simeq 0,2$

2°/

a) $p(X \leq t) = 1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -0,2\,t = -\log 2$

$\Leftrightarrow t = 3,47$

$t \simeq$ trois ans et demi .

3°/ la probabilité qu'un robot n'ait pas en de panne au cours des deux premières années est $p(X > 2)$

$p(X > 2) = 1 - (1 - e^{-0,2\times 2}) = e^{-0,4}$

4°/ $p[X > 6 \mid X > 2] =$

$$\frac{p[(X > 6) \cap (X > 2)]}{p[X > 2]} = \frac{p[X > 6]}{p[X > 2]} = \frac{e^{-1,2}}{e^{-0,4}} = e^{-0,8} \simeq 0,45$$

STATISTIQUES

Résultats à retenir :

1°/ Soit (X , Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et soit (x_i , y_i)$_{1\ i\ n}$ les valeurs numériques prises respectivement par les variables X et Y .

La distribution marginale de al variable X est la distribution des valeurs (x_i) $_{1\ i\ n}$ prises par la variable X.

La distribution marginale de la variable Y est la distribution des valeurs (y_i) $_{1\ i\ n}$ prises par la variable Y .

2°/Soit X une série statistique sur un échantillon de taille n .

Si $\overline{X}$, V(X) et σ_X désignent respectivement la moyenne , la variance et l'écart-type de la série , alors $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$,

V(X) = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{X})^2$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, où les valeurs x_1 ,x_2,…, x_p désignent les valeurs distinctes prise par la variable X si elle est discrète , ou les centres des classes si la variable X est continue . L'entier ni désigne l'effectif de la valeur x_i .

3°/Soit (X,Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n .

On appelle covariance de (X,Y) le réel , noté cov (X,Y) défini par cov (X,Y) = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j - \overline{X}.\overline{Y}$, où (x_i , y_i) est la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrètes , ou le centre de la classe si l'une des variables est continue .

3°/ soit (X,Y) une série statistique double de taille n .

soit nij le nombre de fois qu'apparaît le couple (x_i , y_j) .

alors cov (X,Y) = $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} n_{ij} x_i y_j - \overline{X}.\overline{Y}$.

4°/ soit (X,Y) une série statistique double de valeurs (xi , yi) $_{1 \, i \, n}$.

l'ensemble des points Mi de coordonnées(xi , yi) dans un repère orthogonal est appelé nuage de points représentant la série statistique .

le point moyen du nuage est le point dont les coordonnées dont les coordonnées sont les moyens $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

5°/ Principe de la méthode de Mayer

Soit un nuage de points représentant une série statistique double (X,Y) et G son point moyen .

On scinde le nuage de points de (X,Y) en deux parties contenant à peu près le même nombre de points .

On considère alors les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages obtenus

La droite (G_1G_2) définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X,Y) .

La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point moyen G du nuage global .

6°/ Soit (X,Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et telle que $\sigma_X \neq 0$.

Soit(x_i , y_i) 1 i n les valeurs observées de la série . Alors la somme $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ est minimale pour le couple (a_0 ,b_0) tel que

$a_0 = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}$ et b0 = $\left(\overline{Y} - \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\overline{X}\right)$

7°/ Soit (X,Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n .

La droite d'équation y = $\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\left(x - \overline{X}\right) + \overline{Y}$ est appelée droite des moindres carrés de Y en X , ou droite de régression de Y en X .

La droite d'équation x = $\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\left(y - \overline{Y}\right) + \overline{X}$ est appelée droite des moindres carrées de X en X , ou droite de régression de X en Y .

8°/ Les droites des moindres carrées de Y en X et de X en Y passent par le point moyen G du nuage associé à la série (X,Y) .

* Soit (X,Y) une série statistique double . On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté ρ_{XY} défini par $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

* Soit (X,Y) une série statistique double . Alors $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par changement d'unité ou d'origine .

Les statisticiens conviennent que lorsque $|\rho_{XY}| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, l'ajustement affine est justifié et les prédictions faites au moyen de cet ajustement sont raisonnables .

EXERCICES

Exercice 1 :

Les résultats d'une enquête statistique portant sur le nombre d'employés chez les commerçants d'une ville a donné les résultats suivants :

Nombre d'employés x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'établissements y_i	160	110	100	72	36	29	20	10	3

1°/ Représenter graphiquement cette série de points.

2°/ Déterminer les équations des 2 droites de régression.

3°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Conclure.

4°/ Trouver les coordonnées du point G intersection des deux droites de régression. Que représente le point G ?

Exercice 2 :

Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y a été effectuée mensuellement au cours des six premiers moins de l'année 1997 et a conduit aux conclusions suivantes :

a) Les six valeurs du caractère X correspondant dans l'ordre aux six premiers mois de l'année 1997 constituent une suite arithmétique de raison 1.

b) La droite de régression de Y par rapport à X a pour équation $Y = 1{,}2\,X$.

c) La droite de régression de X par rapport à Y a pour équation :

$9\,X = 3{,}5\,Y + 24$.

1°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Y).

2°/ Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

3°/ Déterminer les six valeurs du caractère X correspondant aux six premiers mois de l'année 1997.

Exercice 3 :

On donne la série statistique suivante à deux variables.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	14	16	a

Par la méthode des moindres carrés, on a : obtenu l'équation de la droite (D) de régression de Y par rapport à X : $Y = 9\,X + 0{,}6$.

1°/a) Calculer $\overline{X}$.

b) Exprimer la moyenne $\overline{Y}$ en fonction de a.

2°/ En déduire a.

3°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X,Y).

Exercice 4 :

Dans le tableau statistique suivant, X désigne la température moyenne extérieure en 24 heures et Y désigne la consommation de pétrole de chauffage pour les mêmes 24 heures et pour une famille donnée.

X en degrés	–2	0	4	8	10
Y en litres	40	30	20	15	10

1°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et vérifier qu'il y a une forte corrélation linéaire entre ces deux variables.

2°/ Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X.

3°/ Quelle prévision (en litres sur sa consommation de pétrole peut faire la famille considérée, si une vague de froid persiste pendant 48 heures avec une température moyenne extérieure de – 4° ?

Exercice 5 :

Dans une entreprise, la somme z en dinars réservée au lancement d'un nouveau produit varie en fonction du temps x exprimé en années.

En posant $y = \text{Log}\, z$, on a obtenu le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	13,3	12,9	12,5	12,1	11,7

1°/a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (x, y). Interpréter le résultat obtenu.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x.

2°/ Exprimer z en fonction de x et donner une valeur approchée de z quand x vaut 10 en années.

Exercice 6 :

Le rendement R d'une variété de blé (en quintaux par hectare) et la quantité E d'engrais azotés (en kilogrammes par hectare) utilisée pendant la culture sont indiqués dans le tableau suivant :

E (kg / ha)	50	60	70	80	90
R (q / ha)	35,7	41,4	45,7	47,2	50,8

1°/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (E, R). Que peut-on en déduire ?

2°/ Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de R en E.

3°/ Quel rendement peut-on prévoir pour une culture utilisant une quantité d'engrais azotés E = 100 kg / ha .

Exercice 7 :

Le tableau ci-dessous donne le poids Y (en Kg) de 63 nouveaux nés ainsi que le poids maternel X .

Y \ X	]40,50]	]50,60]	]60,70]	]70,80]	Total
]1.5,2.5]	**1**	**0**	**1**	**0**	2
]2.5,3.5]	**11**	**17**	**13**	**2**	43
]3.5,4.5]	**4**	**4**	**8**	**2**	18
Total	16	21	22	4	63

1°/ Calculer $\overline{X}$ et σ_X , ainsi $\overline{Y}$ et σ_Y .

2°/ Déterminer la covariance de X et Y . Interpréter .

Exercice 8 :

Le tableau ci contre indique l'évolution du personnel paramédical tunisien dans le secteur public (techniciens supérieurs, infirmeries, auxiliaires de santé) de 1990 à 2005 .

1°/ En numérotant les années de 0 à 15, déterminer les valeurs de la série double (X , ln Y) , où X est le rang de l'année et Y est le nombre de paramédicaux de l'année correspondante .

2°/ Représenter le nuage de points.

3°/ On pose $Z = \ln Y$

a) Calculer le coefficient de corrélation et justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par les moindres carrées de la série (X ,Z) .

b) Donner la droite de régression de Z en X.

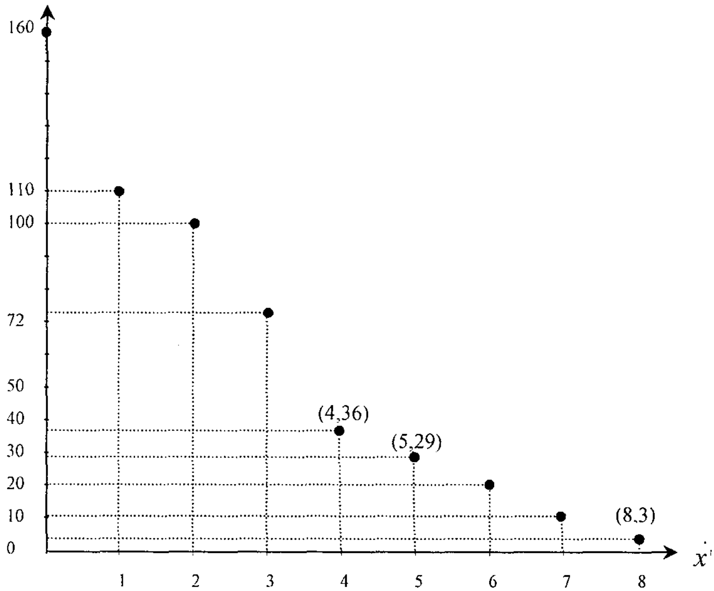
4°/ Quel sera le nombre de paramédicaux en 2020 ?

Année	Paramédicaux
1990	23743
1991	24555
1992	25070
1993	25291
1994	25466
1995	25874
1996	26130
1997	26369
1998	26676
1999	27050
200	27392
2001	30292
2002	28629
2003	29976
2004	29584
2005	29607

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/



2°/ • La droite de régression de Y par rapport à X est $\mathcal{D}$:

$$Y = a\,X + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\,\overline{X}.$$

Or $\operatorname{cov}(X,Y) = \dfrac{\sum x_i y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y}$.

on a : $\overline{X} = \dfrac{1}{N}\sum_i x_i = 4$; $V_X = \dfrac{\sum x_i^{\,2}}{N} - (\overline{X})^2 \approx 6{,}66$

et $\overline{Y} = \dfrac{1}{N}\sum_i x_i = 4$; $V_Y = \dfrac{\sum y_i^{\,2}}{N} - (\overline{Y})^2 = 2570$

d'où : $\operatorname{cov}(X,Y) \approx -125{,}66$; $a = -18{,}86$; $b = 135{,}44$.

d'où : $\mathscr{D}$: $Y = -18{,}86X + 135{,}44$.

• La droite de régression de X par rapport à Y est $\mathscr{D}'$: $a'Y + b'$

avec $a' = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V_Y}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.

On a : $a' \approx -0{,}05$ et $b' \approx 6{,}93$.

D'où $\mathscr{D}$: $X = -0{,}05Y + 6{,}93$.

3°/ $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V_X \cdot V_Y}} \approx -\ 0{,}96$.

La corrélation est forte.

4°/a) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent au point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ d'où G (4;60).

G représente le point moyen de la série double (X, Y).

Solution 2 :

1°/ On a : $a = 1{,}2$ et $a' = \dfrac{3{,}5}{9}$.

Et on sait que $aa' = \rho_{XY}^2$ d'où $\rho_{XY} = \pm\sqrt{aa'}$ or a, a' et r ont

même signe d'où $\rho_{XY} = \sqrt{aa'} \Rightarrow \rho_{XY} \approx 0{,}68$.

2°/ Les deux droites de régressions se coupent au point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$

$\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont solutions du système : $\begin{cases} Y = 1{,}2\,X & (1) \\ 9X = 3{,}5\,Y + 24 & (2) \end{cases}$.

(2) s'écrit : $9X = 3,5(1,2X) + 24$

$$9X = 4,2\,X + 24 \qquad \text{d'où } X = \frac{24}{4,8} = 5 \quad \text{d'où } Y = 6\,.$$

Conclusion : $\overline{X} = 5$ et $\overline{Y} = 6$.

3°/ Soit X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6. Les 6 valeurs du caractère X, ce sont dans l'ordre les 6 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1.

On a : $\overline{X} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$ d'où : $\sum_{i=1}^{6} x_i = 6\overline{X} = 30$.

Or $X_2 = X_1 + 1$, $X_3 = X_1 + 2$, $X_4 = X_1 + 3$, $X_5 = X_1 + 4$ et $X_6 = X_1 + 5$.

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 30 \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 30 \Rightarrow X_1 = \frac{15}{6} = 2,5\,.$$

Conclusion : Les 6 valeurs du caractère X sont données par le tableau suivant :

X_i	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5

Solution 3 :

1°/a) $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$.

b) $\overline{Y} = \dfrac{13+12+14+16+a}{5} = \dfrac{55+a}{5}$.

2°/ On sait que le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ donc

$\overline{Y} = 9\overline{X} + 0{,}6$ or $\overline{X} = 1{,}6$ et $\overline{Y} = \dfrac{55+a}{5}$.

D'où on obtient : $\dfrac{55+a}{5} = 15$ d'où $a = 20$.

3°/ $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \;\; \sigma_Y} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V_X V_Y}}$

or $\text{cov}(X,Y) = \dfrac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}\;\bar{y} = \dfrac{0{,}4\,a - 4{,}4}{5} = 0{,}72$

$V_X = \dfrac{\sum x_i^2}{N} - (\overline{X})^2 = 0{,}08$; $V_Y = \dfrac{\sum x_i^2}{N} - (\overline{Y})^2 = 8$

d'où $\rho_{XY} = \dfrac{0{,}72}{\sqrt{0{,}64}} = \dfrac{0{,}72}{0{,}8} = 0{,}9$.

Remarque : la corrélation est forte. car $|\rho_{XY}| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solution 4 :

1°/ $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i}{N} = 4$ et $V_X = \dfrac{\sum x_i^2}{N} - \overline{X}^2 = 20{,}8$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{N} = 23 \text{ et } V_Y = 116$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y} = -48 .$$

d'où $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{V_x V_Y}} = -0{,}97$

il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

2°/ $\boldsymbol{D}$: $Y = aX + b$ où $\quad a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{V_x} = \dfrac{-48}{20{,}8} \approx -2{,}3$

et $b = \overline{Y} - a\overline{X} = 32{,}23$.

d'où $Y = -2{,}3X + 32{,}23$.

3°/ La corrélation est forte donc les points de la série (x, y) sont presque alignés donc on peut remplacer dans l'équation de $\boldsymbol{D}$, X par -4 pour obtenir la consommation de pétrole Y de la famille pendant 24 heures. On obtient : $Y = (-2{,}3)(-4) + 32{,}23 = 41{,}43$.

Pendant 48 heures on prévoit que la famille consomme $2 \times (41{,}43)\ l$ soit $83l$.

Solution 5 :

1°/a) • $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i}{N} = 3$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} - (\overline{X})^2 = 2 \text{ d'où } \sigma_X = \sqrt{2} .$$

• $\overline{Y} = \dfrac{\sum y_i}{N} = 12{,}5$

$$V_Y = \frac{\sum y_i^2}{N} - (\overline{Y})^2 = 0{,}32 \quad \text{d'où } \sigma_Y = 0{,}4 \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{cov}(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \overline{x}\ \overline{y} = 36{,}7 - 37{,}5 = -0{,}8$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov(x, y)}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}8}{\sqrt{2} \cdot (0{,}4\sqrt{2})} = -1.$$

b) $\mathcal{D} : y = a\ x + b$ où $a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{V_x} = \dfrac{-0{,}8}{2} = -0{,}4$ et

$b = \overline{y} - a\overline{x} = 12{,}5 + (0{,}4)(3) = 13{,}7$.

Conclusion : $\mathcal{D} : y = -0{,}4x + 13{,}7$.

2°/ $\text{Log}\, z = y \Leftrightarrow z = e^y$ or $y = -0{,}4x + 13{,}7$.

Conclusion : $z = e^{(-0{,}4x+13{,}7)}$.

lorsque $x = 10 \Leftrightarrow z = e^{9{,}7} \approx 16317{,}60$.

Solution 6 :

1°/ $\rho_{ER} = \dfrac{\text{cov(E, R)}}{\sigma_E \cdot \sigma_R}$

on a : $\overline{E} = \dfrac{1}{5}\sum E_i = 70$; $\qquad V_E = \dfrac{1}{5}\sum E_i^2 - (\overline{E})^2 = 200$

$$\sigma_E = \sqrt{V_E} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$\overline{R} = 44{,}16$; $V_R = 26{,}9784$ et $\sigma_R \approx 5{,}1941$.

$$\text{cov(E, R)} = \frac{\sum E_i R_i}{5} - \overline{E} \cdot \overline{R} = 3163{,}2 - 3091{,}2 = 72$$

d'où $r \approx 0{,}98$ donc la corrélation est forte.

2°/ $\Delta : \mathrm{R} = a\,\mathrm{E} + b$ où $a = \dfrac{\mathrm{cov(E\,,R)}}{\mathrm{V_E}} = \dfrac{72}{200} = 0{,}36$

et $b = \overline{\mathrm{R}} - a\,\overline{\mathrm{E}} = 44{,}16 - 0{,}36 \cdot 70 = 18{,}96$

d'où $\Delta : \mathrm{R} = 0{,}36\,\mathrm{E} + 18{,}96$.

3°/On a : $\mathrm{R} = 0{,}36 \cdot \mathrm{E} + 18{,}96$ et $\mathrm{E} = 100$ kg / ha

d'où $\mathrm{R} = 54{,}96$ q / ha .

Solution 7 :

1°/ Etude de la variable X

x_i (centres des classes de la variable X)	45	55	65	75	
n_i	16	21	22	4	$\sum_{i=1}^{4} n_i = 63$
x_i^2	2025	3025	4025	5625	
$n_i x_i$	720	1155	1430	300	$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = 3605$
$n_i\, x_i^2$	32400	63525	92950	22500	$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 = 211375$

Le calcul donne

$$\overline{X} = \frac{1}{63}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i \simeq 57{,}222\,, \quad V(X) = \frac{1}{63}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - (\overline{X})^2 = 80.776$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 8.9875$$

- Etude de la variable Y

y_j	2	3	4	
n_j	2	43	18	$\sum_{j=1}^{3} n_j = 63$
y_j^2	4	9	16	
$n_j y_j$	4	129	72	$\sum_{j=1}^{3} n_i y_j = 205$
$n_i y_j^2$	8	387	288	$\sum_{j=1}^{3} n_i y_j^2 = 683$

Le calcul donne

$$\overline{Y} = \frac{1}{63}\sum_{j=1}^{3} n_i y_j = 0.2529, \quad V(Y) = \frac{1}{63}\sum_{j=1}^{3} n_i y_i^2 - (\overline{Y})^2 \quad , \sigma_X = \sqrt{V_Y} \simeq 0.5029$$

2°/ Dressons les couples distincts des valeurs observées et leurs effectifs :

Couples (x_i, y_j)	(45,2)	(45,3)	(45,4)	(55,3)	(55,4)	(65,2	(65,3)	(65,4)	(75,3)	(75,4)
Effectifs n_{ij}	1	11	4	17	1	1	13	8	2	2
$N_{ij} . x_i .$	90	1485	720	2805	880	130	2535	2080	450	600

Le calcul donne

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_i y_j = 11775 .$$

D'où cov (X,Y) = $\frac{1}{63} \times 11775 - \overline{XY} \simeq 0.7$

Interprétation

La covariance est positive donc X et Y ont tendance à varier dans le même sens.

Solution 8 :

x_i	y_i	$z_i = \ln(y_i)$	x_i^2	z_i^2	x_iz_i
0	23743	10.075	0	101.505	0
1	24555	10.108	1	102.171	10.108
2	25070	10.129	4	102.597	20.258
3	25291	10.138	9	102.778	30.414
4	25466	10.145	16	102.921	40.580
5	25874	10.160	25	103.230	50.800
6	26130	10.170	36	103.430	61.020
7	26369	10.179	49	103.612	71.253
8	26676	10.191	64	103.860	81.528
9	27050	10.205	81	104.142	91.845
10	27392	10.218	100	104.410	102.180
11	30292	10.318	121	106.461	113.498
12	28629	10.262	144	105.310	123.144
13	29976	10.308	169	106.254	134.004
14	29584	10.294	196	105.970	144.116
15	29607	10.295	225	105.990	154.425

Le calcul donne $\overline{X} = 7.5$, $\sigma_X = 4$, $\overline{Z} = 10.199$, $\sigma_Z = 0{,}074$ cov (X,Z) = 0.326 , $\rho_{XZ} = 0.960$.

le coefficient de corrélation est très proche de 1 .
L'ajustement est donc justifié.

La droite de régression est d'équation $z = \dfrac{0.326}{(4.61)^2}(x - 7.5) + 10.199$

Soit z = 0.015(x – 7.5) + 10.199 .

4) Le nombre de paramédicaux sera de $e^{0.015(20-7.5)+10.199} \simeq 34424$.

PROBLEMES

Problème 1 :

I- Soit m un nombre complexe.

1°/ On pose : $P(m) = -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i$

Montrer que $P(m) = (2im + i + 4)^2$

2°/ On considère, dans C, l'équation :

(E) : $z^2 - (2m + 5i)z + 2m^2 + (1+i)m - 2(5+i) = 0$

où m est un paramètre appartenant à l'ensemble C des nombres complexes.

a) Déterminer les deux solutions de l'équation (E).

b) Calculer m pour que m soit lui-même solution de l'équation (E).

II- Dans la suite, on considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan d'affixe un nombre complexe m.

On désigne :

* par S la similitude directe, qui au point M, associe le point Q d'affixe $z = (1+i)m + 2 + 3i$.

* par S' la similitude directe, qui au point M, associe le point Q' d'affixe $z' = (1-i)m - 2 + 2i$.

1°/ Donner les éléments caractéristiques de chacune des deux similitudes directes S et S'.

2°/ Montrer que $S' \circ S$ est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre J.

3°/ Montrer que l'application f qui envoie Q sur Q' est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle.

4°/ Soit I le milieu de $[QQ']$. On pose $I = t(M)$.

a) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

b) Montrer que si Q est distinct de Ω, alors les droites (ΩI) et (QQ') sont perpendiculaires.

5°/ a) On donne un point M du plan. Déduire, de ce qui précède, une méthode pour construire simplement les points Q et Q' tels que : $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$

b) On donne un point Q du plan.

Construire les points M et Q' tels que : $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$.

6°/ Soit M un point du plan et $Q = S(M)$, $Q'=S'(M)$.

a) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que les points M, Q et Q' soient alignés.

b) En déduire, dans le cas précédent, l'ensemble des points Q et celui des points Q'. Construire ces deux ensembles.

Problème 2 :

Soit dans le plan orienté, un losange $ABCD$ tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et AB $\geq$ 6 (en cm).

Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AD]$ et $[AC]$. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BCD et O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

1°/ Soit $f = S$ o R_{DA} (S_{DA} étant la symétrie orthogonale d'axe (DA)).

a) Déterminer la droite Δ telle que $R = S_{DA}$ o S_{Δ} .

b) En déduire la nature et les éléments caractéristique de f.

2°/ Soit $g = R$ o S_{BC} .

a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$.

b) Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

c) Déterminer la nature de g et donner sa forme réduite.

3°/ On désigne par h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $S = R \circ h$. Soient (ζ) et (ζ') les cercles circonscrits respectivement aux triangles BCD et DKL. Soit E le point diamétralement opposé à D dans le cercle (ζ).

Determiner $S(B)$, $S(C)$ et $S(E)$.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.

Montrer que (ζ') est le cercle de diamètre $[DO']$.

Problème 3 :

On donne dans le plan orienté, un triangle rectangle OAB tel que :

$OA = 2OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \widehat{\;}\, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ (On prendra long $[OA] = 8cm$)

Soient J et K les milieux respectifs des segments $[OA]$ et $[OB]$. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à B, I le symétrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur (AB).

A - Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1°/ Préciser $r(A)$ et $r(B)$.

2°/ Soit $G = r(H)$

a) Montrer que, G appartient à (IA') et que (OG) et (IA') sont perpendiculaires .

b) Construire alors le point G.

B - Soit s la similitude directe qui transforme O en A et B en O.

1°/ a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Montrer que le centre de s est le point H.

c) Montrer que $s(K) = J$; en déduire que : $(HK) \perp (HJ)$.

2°/ La perpendiculaire en A à (OA) coupe la droite (KH) en C.

a) Montrer que $s(OA) = (AC)$

b) En déduire que $s(J) = C$

c) Montrer alors que $HC = OA = AC$

C - Soit $h = s \circ r^{-1}$. On désigne par L le symétrique de O par rapport à I.

1°/ a) Déterminer $h(I)$ et $h(O)$.

b) Montrer que h est une homothétie et déterminer son rapport.

c) Montrer que h a pour centre le point L.

2°/ a) Déterminer l'image de G par $s \circ r^{-1}$.

b) En déduire que G est le milieu de $[LH]$

c) Montrer que LHA' est un triangle rectangle.

Problème 4 :

Dans le plan P orienté, on considère un rectangle ABCD tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et AB = 2 AD . On désigne par I le milieu de [AB],

O le milieu de [BD] et par (C) le cercle circonscrit au rectangle ABCD .

Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D .

1°/ Montrer que le rapport de f est $\sqrt{2}$ et que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle .

2°/ Soit s la similitude directe de centre C de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que s(B) = I .

b) Montrer que $f \circ s^{-1} = id_P$, où id_P est l'application identique du plan .

c) En déduire que f = s .

3°/ Soit A' = f(A) . Montrer que D est le milieu de [A' I] . Construire alors le point A' .

4°/ La demi-droite [C A') recoupe (C) en O' .

a) Calculer C O' et C A' en fonction de CA .

b) En déduire que O' est le milieu de [C A'] .

c) Prouver alors que O' = f(O)

Problème 5 :

Le plan est orienté ABC est un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$, la lettre O désigne le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle .

les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient : CP = BQ = BC .

1°/ a) Montrer que (CI) est la médiatrice de [PB] et que (BI) est la médiatrice de [CQ] .

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

2°/ Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B .

a) Montrer que f a pour centre I et que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de son angle

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

c) Montrer que les points I, P et Q sont alignés .

(On pourra calculer) $(\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IQ}})$

3°/ On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$.

a) Montrer que $f(O_2) = O$

b) En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$

4°/ Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et g = f o r o f.

a) Montrer que g est une translation .

vérifier que $g(O_2) = O_1$. En déduire le vecteur de la translation

b) Montrer que r(B) = C . En déduire que g(P) = Q .

c) Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires .

5°/ Soit s la similitude directe de centre O et qui transforme I en O_1 .

a) Montrer que $\sqrt{3}$ est le rapport de s et que ($-\frac{\pi}{6}$) est une mesure de son angle .

b) Montrer que pour tout point M du plan distinct de O, d'image M' par s, le triangle OM M' est isocèle de sommet principal M (On pourra utiliser les relations d 'El Kashi) .

c) Construire les points B' et C' images respectives de B et C par s .

Problème 6 :

A - Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = Log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}$$

1°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative ( ) dans un repère orthonormé ($0,\vec{i},\vec{j}$).

2°/ a) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que : $0<\alpha<1$ et $f(\alpha)=0$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \geq \alpha$.

3°/ Soit un réel λ tel que $\alpha \leq \lambda$ .On désigne par A(λ) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ( ), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$.

a) Calculer $A(\lambda)$

b) Trouver la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

B - Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On se propose de déterminer la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$

1°/ Démontrer en utilisant les variations de la fonction f, que :

$Log(n+1) - \log n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4n^2}$ (1) et en déduire que : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

2°/ Démontrer alors que: $U_{n+1} \leq U_n e^{-\frac{1}{4n}}$

et en déduire que : $U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

3°/ Démontrer en utilisant la relation (1) de la première question de la partie **B** du problème, que : $Log(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

et en déduire que : $U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$

4°/ Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

SOLUTIONS

Solution 1 :

I- 1°/ $(2im + i + 4)^2 = (2im)^2 + 4im(i+4) + (i+4)^2$

$= -4m^2 - 4m + 16im + 15 + 8i$

$= -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i$

$= \mathrm{P}(m)$

2°/ a) $\Delta = (2m+5i)^2 - 4(2m^2 + (1+i)m - 2(5+i))$

$= 4m^2 + 20mi - 25 - 8m^2 - 4(1+i)m + 8(5+i)$

$= -4m^2 - 4m(1-4i) + 15 + 8i = \mathrm{P}(m) = (2im + i + 4)^2$

$$z' = \frac{2m + 5i + 2im + i + 4}{2} = m + im + 3i + 2 = (1+i)m + 2 + 3i$$

$$z'' = \frac{2m + 5i - 2im - i - 4}{2} = m - im + 2i - 2 = (1-i)m - 2 + 2i$$

b) m est solution de (E) si et seulement si m vérifie (E)

$m^2 - (2m + 5i)m + 2m^2 + (1+i)m - 2(5+i) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + (1-4i)m - 2(5+i) = 0$

$\Delta = (1-4i)^2 + 8(5+i) = 25$

d'où $m' = \dfrac{-1+4i-5}{2} = -3+2i$ et $m'' = \dfrac{-1+4i+5}{2} = 2+2i$

II- 1°/ * Eléments caractéristiques de S :

Le rapport de S est $k = |1+i| = \sqrt{2}$

L'angle θ de S est $\theta \equiv \arg(1+i)\ (2\pi) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Le centre I a pour affixe $a = \dfrac{2+3i}{1-(1+i)} = \dfrac{2+3i}{-i} = -3+2i$

* Eléments caractéristiques de S' :

Le rapport de S"est $k' = |1-i| = \sqrt{2}$

L'angle θ' de S'est $\theta' \equiv \arg(1-i)\ (2\pi)$

$$\equiv -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$$

Le centre I' a pour affixe $a' = \dfrac{-2+2i}{i}$=2+2i

2°/ S' o S est la composée de deux similitudes directes donc S' o S est une similitude directe de rapport $k.k'$=2 ; d'angle $\alpha \equiv \theta + \theta'\ (2\pi)$

$$\equiv 0\ (2\pi)$$

Donc S' o S est une homothétie de rapport 2.

Forme complexe de S' o S : (pour déterminer le centre de S' o S)

$M(z) \xrightarrow{S'oS} M'(z') : z' = (1-i)\,[(1+i)z + 2 + 3i] - 2 + 2i$

$z' = 2z + 3 + 3i$

D'où le centre J de S' o S a pour affixe $-3 - 3i$.

3°/ Q' a pour affixe $z' = (1-i)\,m - 2 + 2i = -i(1+i)m - 2 + 2i$

Q a pour affixe $z = (1+i)m + 2 + 3i \Rightarrow (1+i)m = z - 2 - 3i$

d'où $z' = -iz - 5 + 4i$

soit f : $M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = -iz - 5 + 4i$on a $f(Q) = Q'$

f est une similitude directe de rapport $k = |-i| = 1$ et d'angle θ tel

que : $\theta \equiv \arg(-i)\ (2\pi)$ soit : $\theta - \frac{\pi}{2} \equiv\ (2\pi)$Donc f est une rotation

d'angle $-\frac{\pi}{2}$ .Soit Ω le centre de f

Ω a pour affixe : $\dfrac{-5+4i}{1+i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2}i$

4°/ a) $I = Q * Q' \Rightarrow z_I = \dfrac{z'+z}{2} = m + \dfrac{5}{2}i$ avec m est l'affixe de M.

Soit $\vec{u}$ d'affixe $\dfrac{5}{2}i$. On a : $\overrightarrow{IM} = \vec{u}$ d'où t est une translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Pour montrer que $(\Omega I) \perp (QQ')$ il suffit de montrer que :

$\dfrac{z_{Q'} - z_Q}{z_I - z_\Omega}$ est un nombre imaginaire pur.

$$\frac{z_{Q'} - z_Q}{z_I - z_\Omega} = \frac{(1-i)m - 2 + 2i - (1+i)m - 2 - 3i}{m + \frac{5}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{-2im - 4 - i}{m + \frac{1}{2} - 2i}$$

$$= \frac{-2i(m - 2i + \frac{1}{2})}{m - 2i + \frac{1}{2}} = -2i \quad \text{d'où } (\Omega I) \perp (QQ').$$

5°/ a) Soit $M \in (P)$ On a : $I = t_{\vec{u}}(M)$ d'où la construction de I

On a : $(\Omega I) \perp (QQ')$ et $I \in (QQ')$ donc : $(\Omega I) \perp (IQ)$

D'où Q appartient à la droite Δ passant par I et perpendiculaire à (ΩI)

Or $f(Q)=Q' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega Q = \Omega Q' \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega Q}, \overrightarrow{\Omega Q'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi) \end{cases}$ donc

$\Omega QQ'$ est un triangle isocèle rectangle en Ω et de sens indirecte et comme $I = Q*Q'$ donc $IQ=IQ'=I\Omega$ d'où la construction de Q et Q'.

b) On a : $f(Q) = Q' \Leftrightarrow \Omega Q=\Omega Q'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega Q}, \overrightarrow{\Omega Q'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$

d'où la construction de Q'. Et comme $I = Q * Q'$ d'où l'emplacement de I.

On a : $t(M) = I \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\vec{u} \Leftrightarrow t_{-\vec{u}}(I) = M$

D'où la construction de M.

6°/ a) M, Q et Q' sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{QQ'}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{MQ}$ a pour affixe: $(1+i)m + 2 + 3i - m = im + 2 + 3i$

$\overrightarrow{QQ'}$ a pour affixe: $-2mi - 4 - i$

On pose $m = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$

$Z_{\overrightarrow{MQ}} = ix - y + 2 + 3i$ d'où $\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix} 2-y \\ x+3 \end{pmatrix}$

$Z_{\overrightarrow{QQ'}} = -2i(x + iy) - 4 - i$ d'où $\overrightarrow{QQ'}\begin{pmatrix} 2y-4 \\ -2x-1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{vmatrix} 2-y & 2y-4 \\ x+3 & -2x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-y)(-2x-1)-(x+3)(2y-4) = 0$

$\Leftrightarrow (-4x - 2 + 2xy + y) - (2xy - 4x + 6y - 12) = 0$

$\Leftrightarrow -5y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

L'ensemble demandé est la droite (δ) d'équation $y = 2$.

b) $Q = S(M)$

M décrit la droite (δ) : $y = 2$ alors Q décrit la droite $(\delta_1) = S(\delta)$

Détermination de δ_1 :

$A(0,2)$; $B(1,2)$ sont deux point de (δ)

Soit $A' = S(A)$ $\Rightarrow$ $z_{A'} = (1+i)2i + 2 + 3i = 5i$
d'où $A'(0,5)$
Soit $B' = S(B)$ $\Rightarrow$ $z_{B'} = (1+i)(1+2i) + 2 + 3i = 1+6i$
d'où $B'(1,6)$

$(\delta_1) = (A'B')$ (on remarque que : $(\widehat{\delta, \delta_1}) \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$)

$Q' = f(Q)$, Q décrit $(\delta_1) \Rightarrow Q'$ décrit $(\delta_2) = f(\delta_1)$

On a : $\delta_2 \perp \delta_1$ (car l'angle de f est $-\frac{\pi}{2}$)

δ_2 passe par le point $A'' = f(A')$ dont l'affixe est :

$z_{A''} = -iz_{A'} - 5 + 4i = -i(5i) - 5 + 4i = 4i$ d'où $A''(0, 4)$

Solution 2 :

BCD étant un triangle équilatéral donc le point O est l'orthocentre du triangle BCD, de même O' est l'orthocentre du triangle ABD.

I-1°/a) $R = \text{rot}\left(D, -\frac{\pi}{3}\right) = S_{DA} \circ S_{\Delta}$ donc $D \in \Delta$ et $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{DA}}) \equiv -\frac{\pi}{6}(\pi)$

Or $(\widehat{\vec{DO}, \vec{DA}}) \equiv -\frac{\pi}{6}(\pi)$ d'où $\Delta = (DO)$

Conclusion : $R = S_{DA} \circ S_{DO}$

b) $f = S_{DA} \circ R = S_{DA} \circ S_{DA} \circ S_{DO} = S_{DO}$

f est une symétrie orthogonal d'axe (DO).

2°/ a) $g(B) = R \circ S_{BC'}(B) = R(B) = A$ car : $\begin{cases} DB = DA \\ (\widehat{\vec{DB}, \vec{DA}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$

$g(C) = R \circ S_{BC'}(C) = R(C) = B$ car : $\begin{cases} DB = DC \\ (\widehat{\vec{DC}, \vec{DB}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{cases}$

b) g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc g est un antidéplacement.

Si g est une symétrie orthogonale donc $g = S_{(d)}$ or $g(C) = B$

$\Rightarrow S_{(d)}(C) = B \Rightarrow S_{(d)}(B) = C \Rightarrow g(B) = C$ or $g(B) = A$

ce qui est absurde .

Conclusion : g n'est pas une symétrie orthogonale.

c) g étant un antidéplacement différent d'une symétrie orthogonale donc g n'est autre qu'une symétrie glissante.

$g = S_{\Delta_1} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta_1}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ_1 .

On a : $g \circ g = t_{2\vec{u}}$

$t_{2\vec{u}}(C) = g \circ g(C) = g(B) = A$ d'où $2\vec{u} = \vec{CA} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} = \vec{CA}\ \vec{CL}$

$g(B) = A \Rightarrow A*B=I \in \Delta_1$.

$g(C) = B \Rightarrow C*B=J \in \Delta_1$ .d'où $\Delta_1 = (IJ)$

Conclusion : $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{CA}} = t_{\overrightarrow{CL}} \circ S_{(IJ)}$

3°/ a) * $S(B) = R \circ h(B)$

On a : $h(B) = L$ car $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2} . \overrightarrow{DB}$ d'où $S(B) = R(L)$

On a : $L = B*D$ donc $R(L) = R(B) * R(D) = A * D = K$

Donc $S(B) = K$

* $S(C) = Roh(C) = R(C')$ avec $C' = h(C) = D * C$

On a $DL = DC'$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC'}, \overrightarrow{DL}}) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi)$ donc $R(C') = L$

D'où $S(C) = L$

* $S(E) = Roh(E) = R(O)$, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle BCD donc $R(O)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABD (car $R(B) = A$, $R(C) = B$ et $R(D) = D$).

d'où $R(O) = O'$ et par suite $S(E) = O'$.

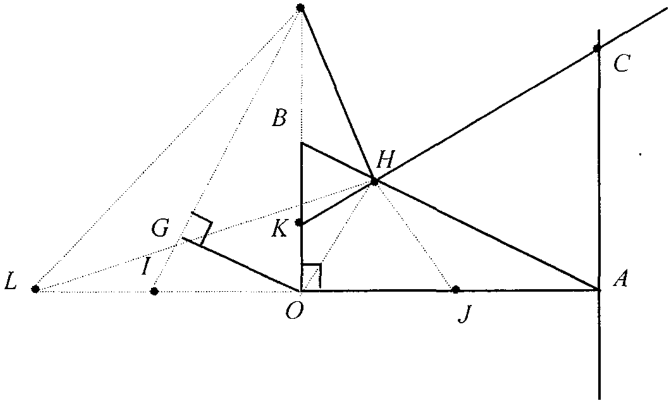
b) S est la composée d'une homothétie et d'une rotation donc S est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre D ($S(D)=Roh(D)=R(D)=D$).

c) On a : $O'KD$ est un triangle rectangle en K donc K appartient au cercle de diamètre $[O'D]$

$O'LD$ est un triangle rectangle en L donc L appartient au cercle de diamètre $[O'D]$

Donc $[O'D]$ est un diamètre du cercle passant par les points O' , L , D et K d'où $[O'D]$ est un diamètre de ζ'.

Solution 3 :



A - 1°/ On a : $OA' = 2OB = OA$

et $(\overrightarrow{OA}, \widehat{\ } \overrightarrow{OA'}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \widehat{\ } \overrightarrow{OB})\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

et $(\overrightarrow{OB}, \widehat{\ } \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\quad (2\pi)$ d'où $r(A) = A'$

on a : $OI = OJ = \frac{1}{2}OA = OB$ donc $OB = OI$ d'où $r(B) = I$.

2°/ a) on a : $H \in (AB)$ donc $r(H) \in r(AB)$ et par suite $G \in r(AB)$ or $r(AB) = (AI)$ car $r(A) = A'$ et $r(B) = I$ d'où $G \in (IA')$

On a : $(OH) \perp (AB)$ et comme la rotation r conserve l'orthogonalité alors : $r(OH) = r(AB)$ or $r(OH) = (OG)$ car $r(O) = O$ et $r(H) = G$ $r(AB) = (IA')$ d'où : $(OG) \perp (IA')$

b) On a : $(OG) \perp (IA')$ et $G \in (IA')$ donc G est le projeté orthogonal de O sur (IA') d'où la construction du point G.

B - 1°/ a) soit k le rapport de S on a : $k = \frac{OA}{OB} = \frac{2OB}{OB} = 2$

Soit θ une mesure de l'angle de S on a :

$\theta \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO})\ (2\pi) \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + \pi \quad (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2} + \pi$

$(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

b) Soit Ω le centre de S on a :

<u>d'une part</u> : $S(O) = A$ et $S(\Omega) = \Omega$ alors $(\Omega O) \perp (\Omega A)$

$S(B) = O$ et $S(\Omega) = \Omega$ alors $(B\Omega) \perp (O\Omega)$

d'où $(\Omega A)//(\Omega B)$ et par suite Ω, A, B sont alignés

<u>d'autre part</u> : $(\Omega O) \perp (\Omega A)$ et $(\Omega A) = (AB)$ (car Ω, A, B sont alignés)

d'où : $\begin{cases} (\Omega O) \perp (AB) \\ \Omega \in (AB) \end{cases}$ donc Ω est le projeté orthogonal de O sur (AB) et

par suite $\Omega = H$

c) on a : $K = O*B$ et S conserve les milieux donc $S(K) = S(O)*S(B)$ or $S(O) = A$ et $S(B) = O$ d'où $S(K) = A*O = J$

on a : $K \xrightarrow{S} J$

$H \xrightarrow{S} H$ donc $(\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HJ}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ et par suite

$(HK) \perp (HJ)$.

2°/ a) Soit $\Delta_1 = S(OA)$ donc $(OA) \perp \Delta_1$ car une mesure de l'angle de S

est $\frac{\pi}{2}$ et comme $S(O) = A$ alors $A \in \Delta_1$ donc Δ_1 est la perpendiculaire

en A à (OA) et par suite $\Delta_1 \perp (AC)$.

Conclusion : $S(OA) = (AC)$

b) Soit $S(J) = J'$ et on a : $S(H) = H$ (car H est le centre de S) donc $(HJ) \perp (J'H)$ or $(HJ) \perp (HK)$ donc $(J'H)//(HK)$ et par suite H, J', K sont alignés et par conséquent $J' \in (HK)$ d'autre part $J \in (OA)$ donc

$s(J) \in s(OA)$

d'où $J' \in (AC)$ donc : $J' \in (HK) \cap (AC) = \{c\}$ d'où $J' = C$

Conclusion : $S(J) = C$

c) <u>d'une part</u> : $J \xrightarrow{S} C$

$O \xrightarrow{S} A$ donc $AC = 2OJ = OA$ car $J = O*A$

<u>d'autre part</u> : $H \xrightarrow{S} H$

$J \xrightarrow{S} C$ donc $HC = 2JH$

or OHA est un triangle rectangle en H et $J = O*A$ donc J représente le centre du cercle circonscrit an triangle OHA et par suite $JH = OJ = \dfrac{1}{2} OA$ et par suite $HC = OA$

Conclusion : $HC = OA = AC$.

C - 1°/ a) * $h(I) = s \circ r^{-1}(I)$ or $r(B) = I$ donc $r^{-1}(I) = B$ et par suite $h(I) = S(B) = O$

* $h(O) = s \circ r^{-1}(O) = S(O) = A$ (car : O est le centre de r et par suite de r^{-1})

b) h est la composée de 2 similitudes directes alors h est une similitude directe .

* Soit k son rapport on a $k = 2.1 = 2$

* Soit θ une mesure de son angle. $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2} + -\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi) \equiv 0 \ (2\pi)$

d'où $\overrightarrow{OW} = 2\,\overrightarrow{OI}$ donc h est une homothétie de rapport 2.

c) On a : $h(I) = O$ et soit W le centre de h donc $\overrightarrow{OW} = 2\,\overrightarrow{WI}$ et par suite :

$\overrightarrow{WO} = 2\,\overrightarrow{WO} + 2\,\overrightarrow{OI}$ or $\overrightarrow{OL} = 2\,\overrightarrow{OI}$ (car : $I = O*L$)

donc $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OL}$ et par suite $W = L$

Conclusion : h a pour centre le point L .

2°/ a) On a : $r(H) = G$ donc $r^{-1}(G) = H$

$s\, o\, r^{-1}(G) = S(r^{-1}(G)) = S(H) = H$

b) On a : $h(G) = H$ et L étant le centre de h donc $\overrightarrow{LH} = 2\,\overrightarrow{LG}$ et par suite $G = L*H$

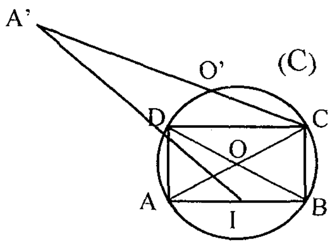
c) On a : $OA' = OL$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OL}}) \equiv \frac{\pi}{2} \;(2\pi)$

donc $r(A') = L$ et comme $r(H) = G$

on a : $A' \xrightarrow{r} L$

$H \xrightarrow{r} G$ donc $(HA') \perp (LG)$ et comme L, G, H sont alignés donc $(LG) = (LH)$ et par suite $(HA') \perp (HL)$ et par conséquent on a LHA' est un triangle rectangle en H.

Solution 4 :



f : $B \to I$
$I \to D$

1°/ Le rapport de f est $k = \frac{ID}{BI}$

On a : $AD = \frac{1}{2}AB = AI$ et $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} \;(2\pi)$

donc IAD est un triangle isocèle rectangle en A

on a $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AI}{ID} \Rightarrow \sqrt{2}\, IA = ID$ d'où $k = \sqrt{2}\frac{IA}{IA} = \sqrt{2}$

on a : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{ID}}) \quad (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}}) \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

2°/ a) On a : CIB est un triangle isocèle rectangle en B et de sens direct, donc $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI}}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ (2\pi)$ et en plus on a : $\frac{CI}{CB} = \sqrt{2}$ donc S(B)=I.

b) foS^{-1} est la composée de 2 similitudes directes donc c'est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ et par suite foS^{-1} est un déplacement, d'angle nul $\Rightarrow foS^{-1}$ est une translation.

or : $foS^{-1}(I) = f(B) = I \Rightarrow foS^{-1} = t_{\overrightarrow{II}} = t_{\vec{O}} = id_P$

c) On a : $foS^{-1} = Id_P \Rightarrow foS^{-1}oS = Id_P \, o \, S \Rightarrow f = S$

3°/ Soit $A \xrightarrow{f} A'$; $I \xrightarrow{f} D$ et $B \xrightarrow{f} I$

On a : I=A*B et comme f conserve les milieux donc f(I)=f(A)*f(B)

$\Rightarrow$ D = A' * I

4°/ a) * on a : $(\widehat{\overrightarrow{CO'},\overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{CA}}) \ (2\pi)$

or : $C \xrightarrow{f} C$ et $A \xrightarrow{f} A'$

donc : $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA'}}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ (2\pi)$ d'ou $(\widehat{\overrightarrow{CO'},\overrightarrow{CA}}) \equiv \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$

* $O' \in C$ et (C) est le cercle de diamètre [AC] donc O' AC est un triangle rectangle en O' d'où O' AC est rectangle isocèle en O'

et par suite : $CO' = \frac{1}{\sqrt{2}}CA$.

* $\begin{cases} f(C) = C \\ f(A) = A' \end{cases}$ donc $CA' = \sqrt{2}CA$

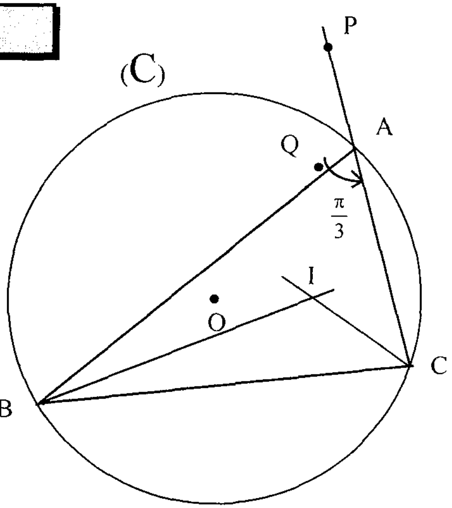
b) On a : $O' \in [CA')$ et $CO' = \frac{1}{\sqrt{2}} CA = \frac{1}{2} CA'$

donc $O' = A' * C$.

c) On a : $O = A*C$ et f conserve les milieux donc $f(O) = f(A)*f(C)$

$\Rightarrow f(O) = A' * C = O'$.

Solution 5 :



1°/ a) On a : CP = BC donc CPB est un triangle isocèle de sommet principal C donc la médiatrice de [PB] est la bissectrice intérieure du secteur $[\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}] = [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$ qui est la droite (CI).

Conclusion : (CI) est la médiatrice [PB]

On a : BC = BQ donc BCQ est un triangle isocèle de sommet principal B et par suite la médiatrice de [CQ] est la bissectrice intérieure du secteur $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BQ}] = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]$ et par suite (BI) est la médiatrice de [CQ]

b) $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}})\ (2\pi)$ car : $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires et de même sens , de même pour $\overrightarrow{QB}$ et $\overrightarrow{AB}$

or : $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + \pi\ (2\pi)$

$$\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi\ (2\pi)$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$$

Conclusion : $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

2°/ $f : C \to Q$

$P \to B$

Soit Ω le centre de f on a : $\Omega C = \Omega Q$ et $\Omega P = \Omega B$ donc Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments [QC] et [BP]

d'où $\{\Omega\} = (BI) \cap (CI)$ et par suite $\Omega = I$

soit θ une mesure de l'angle de f on a : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}})\ (2\pi)$

$$\equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi) \text{ (d'après 1°/ b)}$$

Conclusion : $f = R(I, \frac{2\pi}{3})$

b) on a : $\widehat{BIC} + \widehat{IBC} + \widehat{ICB} \equiv \pi$

or $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

d'où $\widehat{BIC} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et par suite $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}$

c) On a : $C \xrightarrow{f} Q$

$P \xrightarrow{f} B$

$I \xrightarrow{f} I$

On a : $(\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ et $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$(\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) + (\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}})\quad (2\pi)$

$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\quad (2\pi)$

$\equiv 0\quad (2\pi)$ et par suite I , P , Q sont alignés

3°/a) $f(O_2) = f \circ f(O_1) = f \circ f \circ f(O)$

$f = R(I, \frac{2\pi}{3})$ donc $fofof = R(I, 2\pi) = id$

d'où $f(O_2) = id_P(O) = O$

b) On a : $f\ O \to O_1$

$O_1 \to O_2$

$O_2 \to O$

f étant une rotation donc f conserve les distances et par suite :

$OO_1 = O_1O_2$ et $O_1O_2 = OO_2$ d'où OO_1O_2 est un triangle équilatéral

On a : $\left.\begin{array}{r} f(O_1) = O_2 \\ f(I) = I \end{array}\right\}$ donc $IO_1 = IO_2$ et par suite I appartient à la médiatrice de (O_1O_2)

d'autre part : O appartient à la médiatrice de (O_1O_2)

donc (OI) est la médiatrice de $[O_1O_2]$

4°/a) g est la composée de trois déplacements donc g est un déplacement d'angle α. $\alpha \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\quad (2\pi)$

$\equiv 0\quad (2\pi)$

donc g est un déplacement d'angle nul alors g est une translation

$g(O_2) = f \circ r \circ f(O_2)$

On a : $f(O_2) = O$ et $r(O) = O$ et $f(O) = O_1$ d'où $g(O_2) = O_1$

et par conséquent $g = t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$

b) On a : $OB = OC$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\ (2\pi)$

$$\equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi) \quad \text{et par suite } r(B) = C$$

$g(P) = f \circ r \circ f(P) = f \circ r(B) = f(C) = Q$

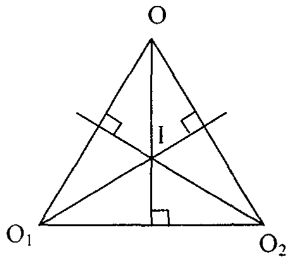
On a : $g(P) = Q$ donc $t_{\overrightarrow{O_2O_1}}(P) = Q$ et par suite $\overrightarrow{O_2O_1} = \overrightarrow{PQ}$

or $(OI) \perp (O_1O_2)$ et par suite $(OI) \perp (PQ)$

5°/a) $s : O \to O$

$I \to O_1$ soit k le rapport de s on a : $k = \dfrac{OO_1}{OI}$

On a : OO_1O_2 est un triangle équilatéral et $IO = IO_1$ (car $f(O) = O_1$) et $IO_1 = IO_2$ (car $f(O_1) = O_2$) d'où $IO = IO_1 = IO_2$ alors I est le centre du cercle circonscrit au triangle OO_1O_2



On a : $OI = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\, OO_1$ d'où $k = \dfrac{OO_1}{OI} = \sqrt{3}$

soit θ une mesure de l'angle de s

On a : $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OO_1}})\ (2\pi)$

$$\equiv \frac{1}{2}\ (\widehat{\overrightarrow{OO_2},\overrightarrow{OO_1}})\ (2\pi)$$

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$$

b) On a : $M \xrightarrow{s} M'$

$O \xrightarrow{s} O$

On a $OM' = \sqrt{3}\,OM$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

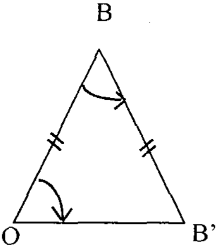
On a : $MM'^2 = OM^2 + OM'^2 - 2\,OM.OM'\cos(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})$

$$MM'^2 = OM^2 + 3OM^2 - 2\,OM.\sqrt{3}\,OM.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MM'^2 = OM^2$$

d'où $MO = MM'$ et par suite OMM' est un triangle isocèle de sommet principal M

c) On a : s (B) = B' donc d'après 5°/ b

on a : OBB' est un triangle isocèle de sommet principal B .



d'autre part : $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BB'}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

ainsi on a : $BO = BB'$ et $(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BB'}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (0)$

et par suite $B' = R(B, \frac{2\pi}{3})$ (O) d'où la construction du point B'

de même : $C' = R(C, \frac{2\pi}{3})$ (O) d'où la construction du point C'

Solution 6 :

A - 1°/ f est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$:

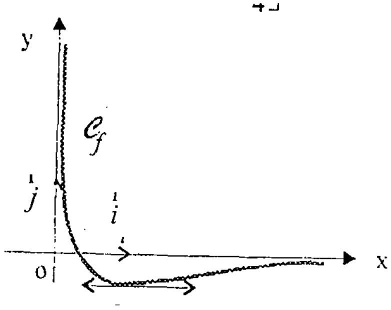
$f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^3} = -\dfrac{1}{x(1+x)} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^3} = \dfrac{x-1}{2x^3(1+x)}$ le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de x-1

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$Log2-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0

(-)

$$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[x^2 Log(\frac{1+x}{x}) - x + \frac{1}{4}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[x^2 Log(1+x) - x^2 Logx - x + \frac{1}{4}\right] = +\infty$$



2°/ a) La restriction de f sur $]0,1]$ est continue et strictement décroissant sur $]0,1]$ donc c'est une bijection de $]0,1]$ sur $\left[Log2 - \frac{3}{4}, +\infty\right[$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]0,1[$ par cette restriction ce qui prouve qu'il existe un réel α unique tel que

$0 < \alpha < 1$ et $f(\alpha) = 0$

b) D'après le tableau des variations de f et d'après 2°/ a)

$\forall x > \alpha \ ; \ f(x) < 0$

3°/ a) $A(\lambda) = \int_\alpha^\lambda |f(x)| dx = \int_\alpha^\lambda -f(x) dx = \int_\lambda^\alpha f(x) dx \quad (U.A)$

$* \int_\lambda^\alpha f(x) dx = \int_\lambda^\alpha Log(1+\frac{1}{x}) dx + \int_\lambda^\alpha (\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x}) dx$

* Calcul de $\int_{\lambda}^{\alpha} Log(1+\frac{1}{x})dx$ faisons une intégration par parties

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = Log(1+\frac{1}{x}) \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = -\frac{1}{x(1+x)} \end{cases}$

d'où $\int_{\lambda}^{\alpha} Log(1+\frac{1}{x})dx = \left[xLog(1+\frac{1}{x}) \right]_{\lambda}^{\alpha} + \int_{\lambda}^{\alpha} \frac{1}{1+x} dx$

$= \alpha Log(1+\frac{1}{\alpha}) - \lambda Log(1+\frac{1}{\lambda}) + [Log(1+x)]_{\lambda}^{\alpha}$

$= \alpha Log(1+\frac{1}{\alpha}) - \lambda Log(1+\frac{1}{\lambda}) + Log(\frac{1+\alpha}{1+\lambda})$

* Calcul de $\int_{\lambda}^{\alpha} (\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x})dx$

$\int_{\lambda}^{\alpha} (\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x})dx = \left[-\frac{1}{4x} - Logx \right]_{\lambda}^{\alpha} = Log(\frac{\lambda}{\alpha}) + \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{4\alpha}$ on obtient

donc

$\int_{\lambda}^{\alpha} f(x)dx = \alpha Log(1+\frac{1}{\alpha}) - \lambda Log(1+\frac{1}{\lambda}) + Log(\frac{1+\alpha}{1+\lambda}) + Log(\frac{\lambda}{\alpha}) + \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{4\alpha}$

$= \alpha Log(1+\frac{1}{\alpha}) - \lambda Log(1+\frac{1}{\lambda}) + Log(\frac{1+\alpha}{\alpha}) - Log(\frac{1+\lambda}{\lambda}) + \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{4\alpha}$

$= (\alpha+1)Log(1+\frac{1}{\alpha}) - (\lambda+1)Log(1+\frac{1}{\lambda}) + \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{4\alpha}$

Conclusion : $A(\lambda) = (\alpha+1)Log(1+\frac{1}{\alpha}) - (\lambda+1)Log(1+\frac{1}{\lambda}) + \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{4\alpha}$

U.A

b) $\lim_{\lambda\to+\infty} (\lambda+1)Log(1+\frac{1}{\lambda}) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{(\lambda+1)}{\lambda} Log\frac{(1+\frac{1}{\lambda})}{\frac{1}{\lambda}}$

or $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{(\lambda+1)}{\lambda} = 1$ et $\lim_{\lambda\to+\infty} Log\frac{(1+\frac{1}{\lambda})}{\frac{1}{\lambda}} = \lim_{X\to 0} \frac{Log(1+X)}{X} = 1$

donc $\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda+1)Log(1+\frac{1}{\lambda})=1$ et par suite

$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=(\alpha+1)Log(1+\frac{1}{\alpha})-1-\frac{1}{4\alpha}$ En remarquant que

$f(\alpha)=0 \Rightarrow \log(1+\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4\alpha^2}$ on obtient $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{4\alpha^2}$

B - 1°/ D'après **A** - 2°/ b) on a : $\forall x\geq\alpha$: $f(x)\leq 0$ donc pour tout entier $n\geq 1$(car $\alpha<1$) on a : $f(n)\leq 0 \;\Rightarrow\; Log(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*$; $Log(n+1)-Logn\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}$

$\Rightarrow Log(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2} \Rightarrow nLog(1+\frac{1}{n})\leq 1-\frac{1}{4n}$

$\Rightarrow e^{nLog(1+\frac{1}{n})}\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$ ce qui donne que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

2°/ On vient de montrer que pour tout entier $n\geq 1$; on a :

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}} \Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n}\leq e^{1-\frac{1}{4n}} \Rightarrow (n+1)^n\leq n^n e^{1-\frac{1}{4n}}$

$\Rightarrow \frac{(n+1)e^{-n-1}(n+1)^n}{(n+1)!}\leq\frac{(n+1)e^{-n-1}}{(n+1)!}n^n e^{1-\frac{1}{4n}}$ d'où

$\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\leq\frac{n^n e^{-n}}{n!}e^{-\frac{1}{4n}}$ ce qui prouve que $U_{n+1}\leq U_n e^{-\frac{1}{4n}}$

* Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $U_{n+1}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$
* Pour n = 1 ; d'après l'inégalité précédente

$U_2\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}}=U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}}$ donc l'inégalité est vraie pour n = 1

* Supposons que pour un entier $n\geq 1$ donné ; $U_{n+1}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

Montrons que $U_{n+2}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$

on a : $U_{n+2}\leq U_{n+1}e^{-\frac{1}{4(n+1)}}$ or $U_{n+1}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ donc

$$U_{n+2} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{4(n+1)}} \text{ d'où } U_{n+2} \le U_1 e^{\frac{-1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

3°/ * D'après la relation (1) on a : pour tout $k \ge 1$:

$$Log(k+1) - \log k \le \frac{1}{k} - \frac{1}{4k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} Log(k+1) - \sum_{k=1}^{n} Logk \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow Log(2) + Log(3) + \ldots + Log(n) + Log(n+1) - -Log(2) - Log(3) - \ldots\ldots -$$

$-Log(n) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ en simplifiant on obtient donc

$$Log(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

* D'après **B**- 2°/ on a : $U_{n+1} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

or $Log(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

d'où $-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \frac{-1}{4} Log(n+1) - \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le -\frac{1}{4} Log(n+1)$

(car $-\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 0$) $\Rightarrow U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$

Il en résulte que $U_{n+1} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$

4°/ Il est évident que la suite (U_n) est positive et d'après **B** - 3°/ on a

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \le U_n \le U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)} = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ ce qui prouve que la suite (U_n) converge vers 0.

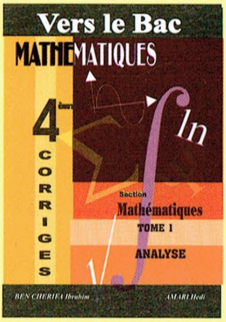
TABLE DES MATIERES

CHAPITRES

✵ ✵ ✵ ✵ ✵ ✵ ✵ ✵ ✵ ✵

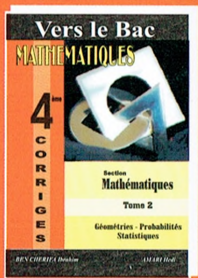
COLLECTION

Vers le Bac



Rappels de Cours
Exercices types
Solutions bien rédigées

Dans la même Collection



Physique Chimie	$1^{\text{ère}}$ Année
Physique Chimie	$2^{\text{ème}}$ Année (toutes sections)
Physique Chimie	$3^{\text{ème}}$ Année (toutes sections)
Physique Chimie	$4^{\text{ème}}$ Année (toutes sections)
Mathématiques	$1^{\text{ère}}$ Année
Mathématiques	$2^{\text{ème}}$ Année (toutes sections)
Mathématiques	$3^{\text{ème}}$ Année (toutes sections)

ISBN 997331856-9
9 789973 316462

PRIX : 7,500