

FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 :

Simplifier au maximum l'écriture des réels suivants

$$A = \ln e^3 - \ln e^2 ; \quad B = e^3 \times e^2 ; \quad C = (1 - 2\sqrt{e})(1 + 2\sqrt{e}); \quad D = \frac{1 - e^4}{1 - e^2} ; \quad E = \ln e^3 + 4 \ln \left(\frac{e}{\sqrt{e}} \right)$$

Exercice 2 : Vérifier, pour tout réel x , les égalités suivantes :

a) $(3 + 2e^x)(2 - 3e^{-x}) = 4e^x - 9e^{-x}$; b) $(e^x - 4)(1 + 4e^{-x}) = e^x - 16e^{-x}$; c) $\frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$

Exercice 3 : Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $e^x - 6e^{-x} - 1 = 0$; b) $e^x - 6e^{-x} - 1 \geq 0$; c)
$$\begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$$

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x - x - 4$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \overset{1}{i}, \overset{1}{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Etudier le comportement de f en $+\infty$. (On pourra factoriser $f(x)$ par e^x .)
3. a) Justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} et donner l'expression de $f'(x)$.
b) Déterminer les variations de f sur \mathbb{R} .
4. Dresser le tableau complet des variations de f .
5. a) Montrer que la droite (D) d'équation : $y = -x - 4$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

6. Tracer la droite (D), puis la courbe (C).

Exercice 5 : Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, J, I). Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + e^{1-x}$ et (C) sa représentation graphique

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$. En déduire que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation.
2. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$: l'équation $1 - e^{1-x} = 0$ et l'inéquation $1 - e^{1-x} \geq 0$
3. Déterminer la dérivée f' de la fonction f . En déduire le sens et le tableau de variation de f .
4. Compléter le tableau de valeurs suivant et construire (C). (On calculera $f(x)$ à 10^{-2} près)

| | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $f(x)$ | | | | | | | |

5. Une entreprise peut fabriquer au maximum 600 articles par jour et le coût de production exprimée en milliers de francs est donnée par : $P(y) = y + e^{1-y}$, où y est le nombre de centaines d'articles produits. L'entreprise vend les articles produits à 1200 F pièces.

- a) Montrer que, pour x centaines d'articles vendus, le montant des ventes peut se mettre sous la forme : $V(x) = 1,2x$
- b) Construire dans le précédent repère la droite (D) d'équation $y = 1,2x$.
- c) Quelle est la position relative de (C) et (D) ?
- d) Déterminer le nombre d'articles à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

Problème : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un

repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2 cm).

1) - Préciser l'ensemble de définition de f .

2) a) - Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) - Montrer que $f(x) = 2 - \frac{6}{e^x + 2}$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) - Donner les équations des droites asymptotes à la courbe de f .

3) a) - Déterminer la dérivée de f et son signe.

b) - Etablir le tableau de variation de f .

4) a) - Déterminer a et b réels tels que $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 2}$

b) - Déterminer une primitive de $f(x)$ (on rappelle que la primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)|$)

5) a) - Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.

b) - Tracer la courbe représentative de f .

c) - Calculer l'aire en cm^2 du domaine délimité par les droites d'équations $x = 1$; $x = 4$; l'axe des abscisse et la courbe représentative (C_f) .

(D'après Bac 2000, Séries L, Epreuve du 1^{er} groupe)